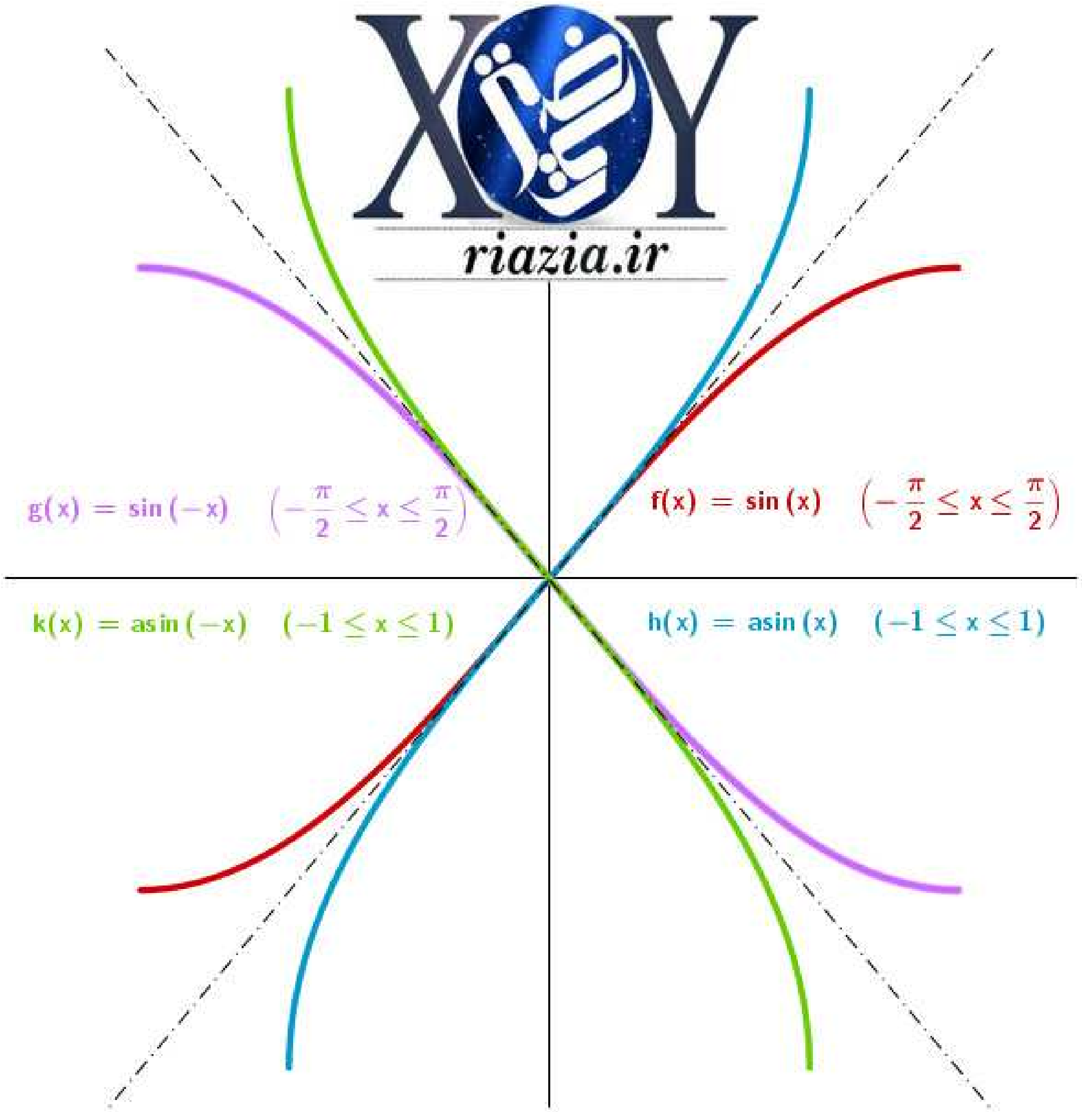
حسابان ۱ فروردین ۱۴۰۱

یازدهم ریاضی فیزیک

پاسخ کامل مسائل کتاب درسی

مؤلف : محمد حسین مصلحی   دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان



فهرست مطالب :

سخن آغازین

درود بر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه که
نسل آینده آن جامعه است ، در اختیار اوست.
درود بر دانش آموز ، تنها امید بر آینده ای روشن .
این کتاب الکترونیکی برگ سبزی است،تقدیم به فرزندان ایران زمین.

اما چرا حل المسائل ؟

۱- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آخرین راه است نه اولین کار.
اگر پیش از تلاش برای حل مساله سراغ حل المسائل بروید ، اعتماد به نفس خود را برای حل مسائل پیش رو از دست خواهید داد واین موضوع بسیار مخرب است.

۲- استفاده برخی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.

۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم متهم به پیچیده کردن حل مساله می گردد .
پاسخهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.

۴- برخی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صحیح سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند.

به دلایلی که برخی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم.

مشتاقانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

محمد حسین مصلحی
د بیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

فروردین ۱۴۰۱

آدرس سایت www.riazia.ir
آدرس اینستاگرام @riaziair
شماره همراه جهت تماس (sms) ۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

۱- الف) اعداد ....,۱,۳,۵,۷ همان تعداد دایره های همرنگ از گوشه بالا سمت چپ است و مجموع آنها مربعی $n\times n$ را می سازد که n همان تعداد رنگها است، پس $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

ب) $a=1\ ,\ d=2 \Rightarrow S_n=\frac{n}{2}(2(1)+(n-1)(2))=\frac{n}{2}(2+2n-2)=\frac{n}{2}(2n)=n^2$

۲- $102\ ,108\ ,114\ ,...,996 \Rightarrow n=\frac{a_n-a}{d}+1=\frac{996-102}{6}+1=150 \Rightarrow S_n=\frac{150}{2}(102+996)=82350$

۳- $5\ ,8\ ,11\ ,... \Rightarrow a=5\ ,d=3\ ,S_n>493 \Rightarrow \frac{n}{2}(10+(n-1)(3))>493 \Rightarrow 3n^2+7n-986>0$

عبارت درجه دوم آخر دارای دو ریشه $n=17\ ,\ n=-\frac{58}{3}$ که برای مثبت بودن عبارت باید $n>17 \vee n<-\frac{58}{3}$ ☒ بنابراین حداقل n برابر ۱۸ است.

۴- $$\left.\begin{array}{l} a_1+a_3+a_5+...+a_{19}=135 \Rightarrow 10a+(0+2+4+...+18)d=135 \\ a_2+a_4+a_6+...+a_{20}=150 \Rightarrow 10a+(1+3+5+...+19)d=150 \end{array}\right\} \Rightarrow 10d=15 \Rightarrow \boxed{d=\frac{3}{2}}$$

$$10a+2(1+2+3+...+9)(\frac{3}{2})=135 \Rightarrow 10a+135=135 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

۵- $a_n=2^{n-1} \Rightarrow a=1\ ,\ a_2=2 \Rightarrow q=2\ ,\ S_n=255 \Rightarrow S_n=a(\frac{q^n-1}{q-1})=1(\frac{2^n-1}{2-1})=255$

$\Rightarrow 2^n-1=255 \Rightarrow 2^n=256=2^8 \Rightarrow \boxed{n=8}$

۶- در مرحله اول $\frac{1}{2}$ و در مرحله دوم $\frac{1}{4}$ و ... پس

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....>\frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right)>\frac{99}{100} \Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n>\frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{2})^n<\frac{1}{100} \Rightarrow 2^n>100 \Rightarrow \boxed{n_{\min}=7}$$

۷- (الف)(ب) با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله هندسی و طرفین وسطین ، اتحاد بدست می آید.

$$1+a+a^2+...+a^{n-1}=1(\frac{a^n-1}{a-1}) \Rightarrow a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1)$$

۱- الف) $S=x_1+x_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\ ,\ P=x_1.x_2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow x^2-x+\frac{2}{9}=0\Rightarrow 9x^2-9x+2=0$

ب) $x_1=2x_2\Rightarrow S=x_1+x_2=2x_2+x_2=3x_2\ ,\ P=x_1.x_2=2x_2.x_2=2x_2^2\Rightarrow x^2-(3x_2)x+2x_2^2=0$

به جای x_2 هر عدد دلخواه می توان نوشت پس بیشمار جواب دارد.

۲- الف) تنها صفر تابع $x=2$ است و $(0,-2)$ متعلق به سهمی است، پس

$$y=a(x-2)^2,\ (0,-2)\in f\Rightarrow -2=a(0-2)^2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$$

ب) صفرهای تابع اعداد $1\,,-3$ هستند و $(-1,-2)$ متعلق به سهمی است ، پس

$$y=a(x-1)(x+3),\ (-1,-2)\in f\Rightarrow -2=a(-1-1)(-1+3)\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$$

۳- الف) به زمین خوردن یعنی ارتفاع صفر $h(x)=0\Rightarrow -0/03x(x-36)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=36$

پس از طی مسافت ۳۶ متر دوباره به زمین برخورد دارد.

ب) حداکثر ارتفاع ، عرض راس سهمی است .

طول راس سهمی ، میانگین طول دو نقطه متقارن سهمی است پس طول راس برابر $\frac{0+36}{2}=18$

$$x=18\Rightarrow h(18)=-0/03(18)(18-36)=\boxed{9/72_m}$$

۴- الف) $f(x)=x^3-4x=x(x^2-4)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm2\Rightarrow\{0,\pm2\}$ صفرهای تابع

ب) $f(x)=2x^3+x^2+3x=x(2x^2+x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\2x^2+x+3=0\Rightarrow\Delta=-23\boxed{\times}\end{cases}\Rightarrow\{0\}$ صفر تابع

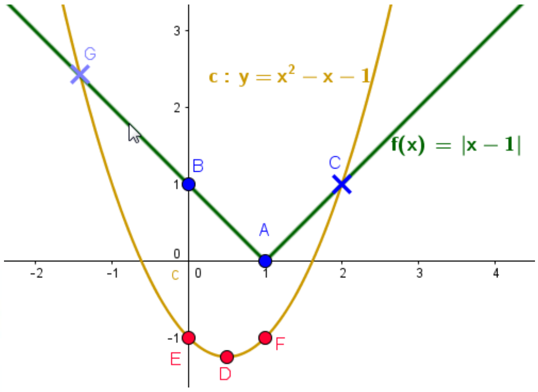
پ) $h(x)=x^4+3x^2+5=(x^2)^2+3(x^2)+5\Rightarrow\Delta=-11\boxed{\times}\Rightarrow\{\ \}$ تابع ، صفر ندارد

۵- الف) $x^4-3x^2-4=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x^2-4=0\Rightarrow x=\pm2\\x^2+1=0\Rightarrow\boxed{\times}\end{cases}$

ب) $(\frac{x^2}{3}-2-6)(\frac{x^2}{3}-2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{3}=8\Rightarrow x^2=24\Rightarrow x=\pm2\sqrt{6}\\\frac{x^2}{3}=3\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm3\end{cases}$

پ) $(4-x^2-4)(4-x^2+3)=0\Rightarrow\begin{cases}4-x^2-4=0\Rightarrow x=0\\4-x^2+3=0\Rightarrow x^2=7\Rightarrow x=\pm\sqrt{7}\end{cases}$

۶- $|x-1|=x^2-x-1 \Rightarrow \begin{cases} y=|x-1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array} \\ y=x^2-x-1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & -1 & -\frac{5}{4} & -1 \end{array} \end{cases}$



۷- معادله سهمی با راس (α , β) ، $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ است و دهانه سهمی روبه بالا a مثبت وپایین منفی است.

الف) $y=1(x+3)^2+5 \Rightarrow y=x^2+6x+14 \Rightarrow \Delta=-20 \Rightarrow \boxed{\times}$ تابع صفر ندارد

ب) $y=-1(x+2)^2+2 \xrightarrow{y=0} (x+2)^2=2 \Rightarrow x+2=\pm\sqrt{2} \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$ صفرهای تابع

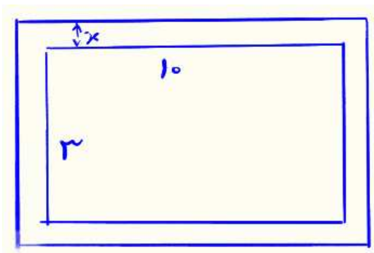
$y=-(x+2)^2+2=-x^2-4x-2$

پ) $y=1(x-3)^2-3 \xrightarrow{y=0} (x-3)^2=3 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{3}$ صفرهای تابع و $y=x^2-6x+9-3=x^2-6x+6$

ت) $y=-1(x+2)^2-1 \xrightarrow{y=0} (x+2)^2=-1 \Rightarrow \boxed{\times}$ تابع صفر ندارد و $y=-x^2-4x-4-1 \Rightarrow y=-x^2-4x-5$

۸- $(10+2x)(3+2x)=14+3\times10 \Rightarrow 4x^2+26x-14=0$

$\Rightarrow 2x^2+13x-7=0 \Rightarrow (2x-1)(x+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-7\ \boxed{\times} \end{cases}$



۹- عرض کاشی x و طول کاشی $4x+1$ و مساحت کاشی $x(4x+1)$ است.

$2000\,x(4x+1)=528000_{cm^2} \Rightarrow 4x^2+x-264=0 \Rightarrow (x-8)(4x+33)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-\frac{33}{4}\ \boxed{\times} \end{cases}$

پس عرض کاشی ۸ و طول کاشی $4(8)+1=33$ سانتیمتر است.

۱- هر دو ریشه پذیرفتنی ، زیرا ریشه مخرج کسر نیستند.

$$\frac{6}{x}=\frac{2}{1}+\frac{x-3}{x+1}\xrightarrow[\times]{x(x+1)}6(x+1)=2x(x+1)+x(x-3)\Rightarrow 3x^2-7x-6=0\Rightarrow \boxed{x=3},\boxed{x=-\frac{2}{3}}$$

۲- هر دو ریشه پذیرفتنی ، زیرا ریشه مخرج کسر نیستند.

$$\frac{p}{2-p}+\frac{2}{p}=-\frac{3}{2}\xrightarrow[\times]{2p(2-p)}2p(p)+2(2-p)(2)=-p(2-p)\Rightarrow 2p^2+8-4p=-2p+p^2$$

$$\Rightarrow p^2-2p-8=0\Rightarrow (p-4)(p+2)=0\Rightarrow \boxed{p=4}\,,\,\boxed{p=-2}$$

۳- عدد $y=0$ پذیرفتنی نیست ، چون ریشه مخرج است.

$$\frac{3y+5}{y(y+5)}+\frac{y+4}{y+5}=\frac{y+1}{y}\xrightarrow[\times]{y(y+5)}1(3y+5)+y(y+4)=(y+5)(y+1)\Rightarrow y=0\,\boxed{\times}$$

۴-

$$2\sqrt{x}=\sqrt{3x+4}\xrightarrow{\square^2=\square^2}4x=3x+4\Rightarrow x=4\xrightarrow{?}2\sqrt{4}\overset{?}{=}\sqrt{3(4)+4}$$

۵-

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\Rightarrow\begin{cases}1-\sqrt{x}=0\Rightarrow x=1\xrightarrow{?}\dfrac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}}\overset{?}{=}1-1\Rightarrow x=1\\(1+\sqrt{x})^2=1\Rightarrow 1+\sqrt{x}=1\Rightarrow x=0\xrightarrow{?}\dfrac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}}\overset{?}{=}1-0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

۶-

$$\frac{5}{\sqrt{x}+2}=2-\frac{1}{\sqrt{x}-2}\Rightarrow(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(\frac{5}{\sqrt{x}+2})=(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(2-\frac{1}{\sqrt{x}-2})$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{x}-10=2(x-4)-1(\sqrt{x}+2)\Rightarrow 2x-6\sqrt{x}=0\Rightarrow\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\xrightarrow{?}\dfrac{5}{\sqrt{0}+2}=2-\dfrac{1}{\sqrt{0}-2}\\x=9\xrightarrow{?}\dfrac{5}{\sqrt{9}+2}=2-\dfrac{1}{\sqrt{9}-2}\end{cases}$$

---

www.riazi.ir

۷-

$$\sqrt{x+3}=4-\sqrt{3x+1}\xrightarrow{\square^2=\square^2}(\sqrt{x+3})^2=(4-\sqrt{3x+1})^2\Rightarrow x+3=16-8\sqrt{3x+1}+3x+1$$

$$\Rightarrow 2x-8\sqrt{3x+1}+14=0\Rightarrow 4\sqrt{3x+1}=x+7\xrightarrow{\square^2=\square^2}16(3x+1)=(x+7)^2\Rightarrow x^2-34x+33=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-33)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\xrightarrow{?}\sqrt{1+3}\overset{?}{=}4-\sqrt{3(1)+1}\\ x=33\xrightarrow{?}\sqrt{33+3}\overset{?}{=}4-\sqrt{3(33)+1}\ \boxed{\times}\end{cases}$$

۸- قیمت اسباب بازی را x و تعداد اسباب بازی قبل تخفیف را n در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}nx=120\\(n+4)(x-1)=120\end{cases}\Rightarrow \cancel{nx}^{120}+4x-n-4=120\overset{n=\frac{120}{x}}{\Rightarrow}4x-\frac{120}{x}-4=0\Rightarrow x-\frac{30}{x}-1=0$$

$$\overset{.x}{\Rightarrow}x^2-x-30=0\Rightarrow (x-6)(x+5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=6\\x=-5\ \boxed{\times}\end{cases}$$

قیمت اسباب بازی قبل تخفیف ۶ هزار تومان بوده است.

۹- اگر ماشین B، ۱۰ واحد کار را در زمان x ساعت انجام دهد، پس B در ۱ ساعت $\frac{1}{x}$ کار انجام می دهد و ماشین A، ۱۰ واحد کار را درزمان $x-15$ ساعت انجام می دهد،پس A در ۱ ساعت $\frac{1}{x-15}$ کار انجام می دهد.

اگر هر دو ماشین شروع به کار کنند در یک ساعت $\frac{1}{x-15}+\frac{1}{x}$ واحد کار انجام می دهند.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-15}=\frac{1}{18}\Rightarrow 18x(x-15)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-15}=\frac{1}{18}\right)\Rightarrow 18(x-15)+18x=x(x-15)$$

$$\Rightarrow x^2-51x+270=0\Rightarrow (x-45)(x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=45\Rightarrow x-15=30\\x=6\Rightarrow x-15=-9<0\ \boxed{\times}\end{cases}$$

پس ماشین B در ۴۵ ساعت و ماشین A در ۳۰ ساعت کار را انجام می دهند.

۱۰- سرعت رفت x و سرعت برگشت $x-8$ پس زمان رفت $\frac{144}{x}$ و زمان برگشت $\frac{144}{x-8}$ و مجموع زمان رفت و برگشت بدون توقف ۱۵ ساعت است .

$$\frac{144}{x}+\frac{144}{x-8}=15\Rightarrow\frac{48}{x}+\frac{48}{x-8}=5\xrightarrow{\times(x)(x-8)}48(x-8)+48(x)=5x(x-8)\Rightarrow 5x^2-136x+384=0$$

$$\Rightarrow 5x^2-136x+384=0\Rightarrow x=\frac{68\pm\sqrt{2704}}{5}=\frac{68\pm52}{5}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{120}{5}=24\Rightarrow x-8=16>0\quad\Rightarrow\boxed{x=24}\\x=\frac{16}{5}=3/2\Rightarrow x-8=-4/8<0\ \boxed{\times}\end{cases}$$

پس سرعت رفت $24_{km/h}$ و سرعت برگشت $16_{km/h}$ بوده است.غ

۱- الف) $f(x)=x|x| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x(x) & x\geq 0 \\ x(-x) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$

ب) $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow g(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x>1)\vee(x<-1) \\ 1-x^2 & -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

پ) $x-1=0 \Rightarrow x=1\,,\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	

$$\Rightarrow h(x)=\begin{cases} -(x-1)-(x+1) & x<-1 \\ -(x-1)+(x+1) & -1\leq x\leq 1 \\ +(x-1)+(x+1) & x>1 \end{cases} \Rightarrow h(x)=\begin{cases} -2x & x<-1 \\ 2 & -1\leq x\leq 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$$

۲- روش اول) با توجه به محور $2a+4=6 \Rightarrow a=1 \Rightarrow x_2=3+1=4\,,\ x_1=-1-1=-2$

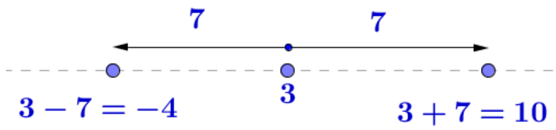
روش دوم) تعیین علامت

$|x+1|+|x-3|=6 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	

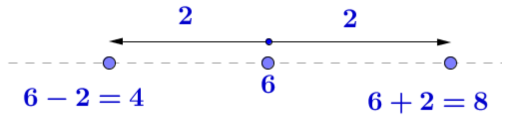
$$\Rightarrow \begin{cases} x<-1 \Rightarrow -x-1-x+3=6 \Rightarrow x=-2 \\ -1\leq x\leq 2 \Rightarrow x+1-x+3=6 \Rightarrow 4=6 \\ x>2 \Rightarrow x+1+x-3=6 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

۳- الف) $|x-3|=7$



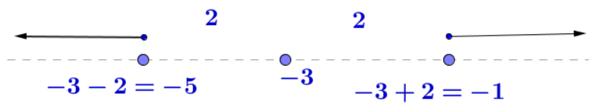
$\Rightarrow x\in\{10,-4\}$

ب) $2|x-6|=4 \Rightarrow |x-6|=2$



$\Rightarrow x\in\{4,8\}$

پ) $|x+3|>2$



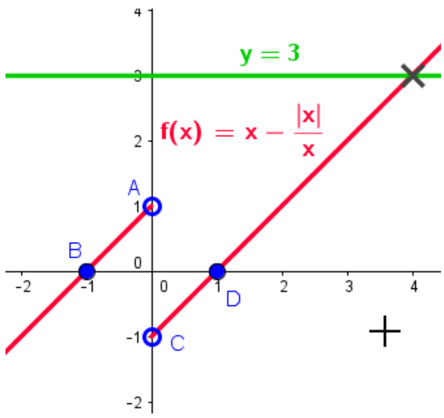
$\Rightarrow x>-1 \ \vee\ x<-5$

۴- الف) $\frac{2-x}{|x-3|}=1 \Rightarrow |x-3|=2-x \Rightarrow x-3=\pm(2-x) \Rightarrow \begin{cases} x-3=2-x \Rightarrow x=\frac{5}{2} \xrightarrow{?} \frac{2-\frac{5}{2}}{\left|\frac{5}{2}-3\right|}\overset{?}{=}1 \\ x-3=-2+x \Rightarrow \boxed{\times} \end{cases}$

ب) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1 \Rightarrow |x-1|=2x+1 \Rightarrow x-1=\pm(2x+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=2x+1 \Rightarrow x=-2 \xrightarrow{?} |-2-1|=2(-2)+1 \\ x-1=-2x-1 \Rightarrow x=0 \xrightarrow{?} |0-1|=2(0)+1 \end{cases}$$

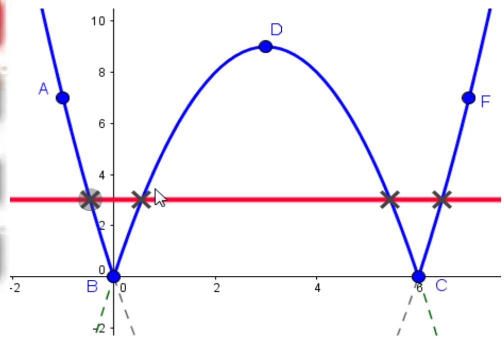
۵- الف) $y=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x-1 & x>0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ y & -1 & 0 \end{array} \\ x+1 & x<0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$



روش هندسی) طول محل برخورد $y=3$ با نمودار f برابر ۴ است.

روش جبری) $x>0 \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=4}$, $x<0 \Rightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2$

ب) $y=|x^2-6x|=\begin{cases} x^2-6x & (x>6)\vee(x<0) \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 0 & 3 & 6 & 7 \\ y & 7 & 0 & -9 & 0 & 7 \end{array} \\ -x^2+6x & 0\le x\le 6 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 3 & 6 \\ y & 0 & 9 & 0 \end{array} \end{cases}$

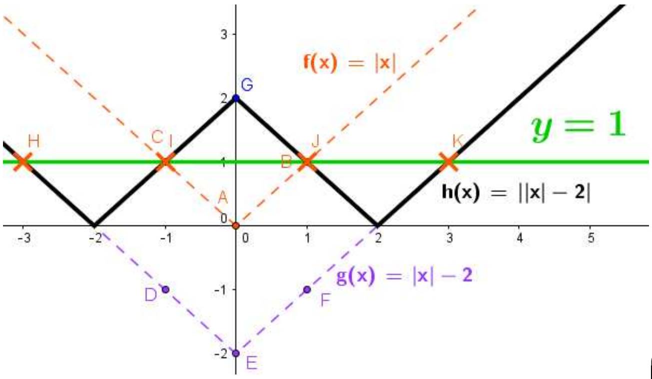


روش هندسی: با توجه به شکل و طول محل های برخورد ریشه های تقریبی عبارتند از $-0/5 , 0/5 , 5/5 , 6/5$

روش جبری :

$$\begin{cases} (x<0)\vee(x>6) \Rightarrow x^2-6x=3 \Rightarrow x^2-6x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3\pm 2\sqrt{3}} \approx 6/4 , -0/46 \\ 0\le x\le 6 \Rightarrow -x^2+6x=3 \Rightarrow x^2-6x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=3\pm\sqrt{6}} \approx 5/4 , 0/55 \end{cases}$$

۶- ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم و ۲ واحد به پایین انتقال داده و سپس قسمتی از نمودار که پایین محور x هاست را به بالا منتقل می کنیم.



روش هندسی)

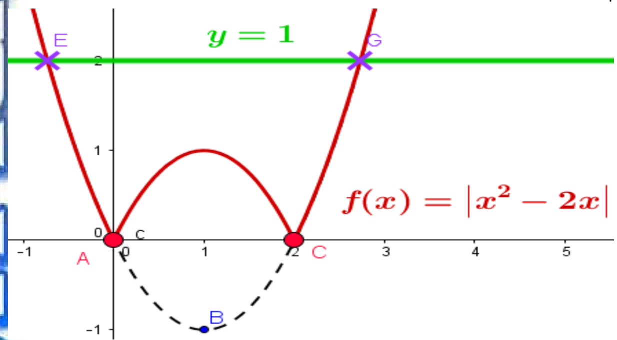
طول محل برخورد تابع f با خط $y=۱$ برابر است با $-۳,-۱,۱,۳$

روش جبری)

$$||x|-۲|=۱\Rightarrow |x|-۲=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}|x|-۲=۱\Rightarrow |x|=۳\Rightarrow \boxed{x=\pm۳}\\ |x|-۲=-۱\Rightarrow |x|=۱\Rightarrow \boxed{x=\pm۱}\end{cases}$$

۷- نمودار تابع را بدون قدر مطلق رسم و قسمتی از نمودار تابع که پایین محور x ها است را به بالای محور انتقال می دهیم.

$$y=x^۲-۲x\Rightarrow x_{\min}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{۲}=۱\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲\\ \hline y & ۰ & -۱ & ۰\end{array}$$



روش هندسی :

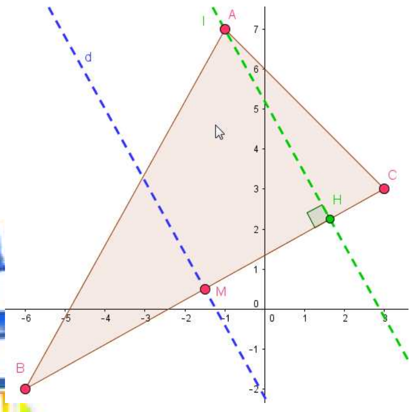
طول تقریبی محل برخورد نمودار تابع f و خط $y=۲$ برابر $۲/۷۵\,,-۰/۷۵$ است.

روش جبری :

$$|x^۲-۲x|=۲\Rightarrow x^۲-۲x=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲x=۲\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow \boxed{x=۱\pm\sqrt{۳}}\approx ۲/۷۳,-۰/۷۳\\ x^۲-۲x=-۲\Rightarrow x^۲-۲x+۲=۰\Rightarrow \Delta=-۴\ \boxed{\times}\end{cases}$$

تذکر : در روش هندسی ، جوابی که از روی نمودار پیدا می کنیم ، تقریبی است و خطای آن بستگی به دقت رسم دارد و همین که حدود ریشه ها را حدس بزنیم ، کافی است.

www.riazi.ir



۱- الف) رسم مثلث

ب)
$$\left.\begin{aligned} AB&=\sqrt{(-۶-(-۱))^۲+(-۲-۷)^۲}=\sqrt{۲۵+۸۱}=\sqrt{۱۰۶}\\ AC&=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(۳-۷)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}\\ BC&=\sqrt{(۳-(-۶))^۲+(۳-(-۲))^۲}=\sqrt{۸۱+۲۵}=\sqrt{۱۰۶}\end{aligned}\right\}\Rightarrow AB=BC$$

پ) مختصات وسط BC برابر
$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{-۶+۳}{۲}=-\dfrac{۳}{۲}\\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{-۲+۳}{۲}=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$ و

شیب BC برابر $m_{BC}=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\dfrac{۳-(-۲)}{۳-(-۶)}=\dfrac{۵}{۹}$ پس شیب عمود بر آن برابر $-\dfrac{۹}{۵}$ است.

و معادله عمود منصف
$$M(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}),m=-\frac{۹}{۵}\Rightarrow y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۹}{۵}(x+\frac{۳}{۲})\Rightarrow y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۹}{۵}x-\frac{۲۷}{۱۰}\Rightarrow \boxed{y=-\frac{۹}{۵}x-\frac{۱۱}{۵}}$$

ت) معادله BC را نوشته و فاصله A تا خط BC را می یابیم.

معادله خط BC برابر
$$C(۳,۳),m_{BC}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow y-۳=\frac{۵}{۹}(x-۳)\Rightarrow y=\frac{۵}{۹}x+\frac{۴}{۳}\Rightarrow \boxed{۵x-۹y+۱۲=۰}$$

و طول ارتفاع AH همان فاصله A تا BC است که برابر
$$A(-۱,۷)\ ,\ ۵x-۹y+۱۲=۰\Rightarrow d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|(۵\times(-۱))+(-۹)\times(۷)+۱۲|}{\sqrt{(۵)^۲+(-۹)^۲}}\Rightarrow \boxed{AH=\frac{۵۶}{\sqrt{۱۰۶}}}$$

۲- مرکز وسط قطر و شعاع دایره ، نصف قطر است . پس

$$\begin{cases} x_o=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۰+۸}{۲}=۴\\ y_o=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{۶+(-۸)}{۲}=-۱\end{cases}\Rightarrow \boxed{O(۴,-۱)}$$

$$AB=\sqrt{(۸-۰)^۲+(-۸-۶)^۲}=\sqrt{۶۴+۱۹۶}=\sqrt{۲۶۰}\Rightarrow r=\frac{AB}{۲}\Rightarrow \boxed{r=\sqrt{۶۵}}$$

۳- الف) A,B محل برخورد با محور x ها یعنی $y=۰$ هستند

$$x^۲-۸x-۲۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۱۰\ ,\ x=-۲\Rightarrow A(-۲,۰)\ ,\ B(۱۰,۰)$$

ب) $AB=|x_B-x_A|=|۱۰-(-۲)|=۱۲_{cm}$

پ) بیشترین ضخامت عدسی ، قدرمطلق عرض راس سهمی است ،

بیشترین ضخامت عدسی $x_C=-\dfrac{b}{۲a}=-\dfrac{-۸}{۲}=۴\Rightarrow y_C=(۴)^۲-۸(۴)-۲۰=-۳۶\Rightarrow |-۳۶|=۳۶_{cm}$

---

۴) چون فاصله دو خط موازی مقداری ثابت است ، فاصله نقطه ای از یکی را تا دیگری محاسبه می کنیم .

$$L_1 : ax+by+c=0\ ,\ x=0 \Rightarrow y=-\frac{c}{b} \Rightarrow A(0,-\frac{c}{b})$$

$$L_2 : ax+by+c'=0 \Rightarrow d=\frac{\left|(a\times 0)+(\cancel{b}\times(-\frac{c}{\cancel{b}}))+c'\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۵- چون خط بر دایره مماس است ، فاصله مرکز تا خط همان شعاع دایره است.

$$r=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(4\times(-1))+(3\times 2)+(-5)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}$$

۶- الف) $OS=r \Rightarrow \sqrt{x^2+8^2}=10 \Rightarrow x^2+64=100 \Rightarrow x=\pm 6$

ب)

$$P(-10,0)\ ,\ S(6,8) \Rightarrow m_{PS}=\frac{8-0}{6-(-10)}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\quad ,\quad Q(10,0)\ ,\ S(6,8) \Rightarrow m_{SQ}=\frac{0-8}{10-6}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$P(-10,0)\ ,\ S(-6,8) \Rightarrow m_{PS}=\frac{8-0}{-6-(-10)}=\frac{8}{4}=2\quad ,\quad Q(10,0)\ ,\ S(-6,8) \Rightarrow m_{SQ}=\frac{0-8}{10-(-6)}=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$$

پ) $m_{PS}\times m_{SQ}=\frac{1}{2}\times(-2)=-1 \Rightarrow PS\perp SQ \quad or \quad m_{PS}\times m_{SQ}=2\times(-\frac{1}{2})=-1 \Rightarrow PS\perp SQ$

۷-

$$2=\frac{|(a\times 1)+(4\times 2)+(-1)|}{\sqrt{a^2+4^2}} \Rightarrow 2=\frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}} \Rightarrow 4(a^2+16)=(a+7)^2 \Rightarrow 4a^2+64=a^2+14a+49$$

$$\Rightarrow 3a^2-14a+15=0 \Rightarrow (3a-5)(a-3)=0 \Rightarrow a=\frac{5}{3}\ ,\ a=3$$

۸- الف) وسط AB

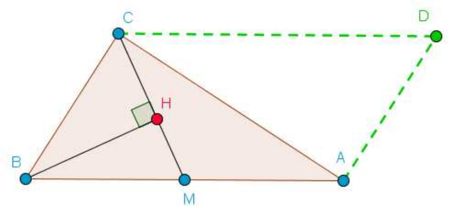
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-11+(-3)}{2}=-7\ ,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-13+3}{2}=-5 \Rightarrow \boxed{M(-7,-5)}$$

معادله خط MC

$$m_{MC}=\frac{1-(-5)}{3-(-7)}=\frac{3}{5} \Rightarrow y-1=\frac{3}{5}(x-3) \Rightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{3x-5y-4=0}$$

طول BH

$$d=BH=\frac{|(3\times(-3))+(-5\times 3)+(-4)|}{\sqrt{(3)^2+(-5)^2}} \Rightarrow \boxed{BH=\frac{28}{\sqrt{34}}}$$



ب) قطرهای متوازی الاضلاع منصف همند پس

$$\begin{cases} x_D+x_B=x_A+x_C \Rightarrow x_D+(-3)=-11+3 \Rightarrow x_D=-5 \\ y_D+y_B=y_A+y_C \Rightarrow y_D+3=-13+1 \Rightarrow y_D=-15 \end{cases} \Rightarrow D(-5,-15)$$

۹-

$$B(b,۲b)\ ,\ A(۲,۴) \Rightarrow \begin{cases} AB=\sqrt{(b-۲)^۲+(۲b-۴)^۲}=|b-۲|\sqrt{۵} \\ OB=\sqrt{b^۲+(۲b)^۲}=|b|\sqrt{۵} \end{cases} ,OB+AB=۵ \Rightarrow \boxed{|b|+|b-۲|=\sqrt{۵}}$$

$$\begin{cases} b<۰ \Rightarrow -b-b+۲=\sqrt{۵} \Rightarrow b=\dfrac{۲-\sqrt{۵}}{۲} \\ ۰\le b\le ۲ \Rightarrow b-b+۲=\sqrt{۵} \Rightarrow ۲=\sqrt{۵} \\ b>۲ \Rightarrow b+b-۲=\sqrt{۵} \Rightarrow b=\dfrac{۲+\sqrt{۵}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B_۱=(\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲},۲-\sqrt{۵})}\ ,\ \boxed{B_۲=(\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲},۲+\sqrt{۵})}$$

۱۰- معادله BC,AH را قطع می دهیم تا H بدست آید و سپس طول MH را پیدا می کنیم.

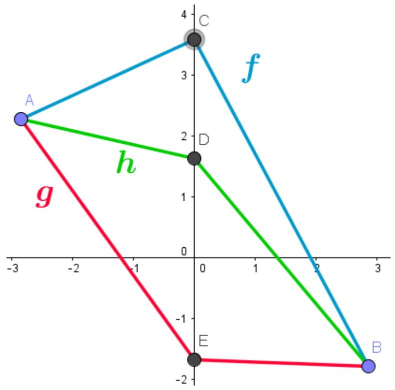
$$m_{BC}=\frac{-۲-(-۱)}{۸-۱}=-\frac{۱}{۷} \Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۷}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۷}x-\frac{۶}{۷} \Rightarrow \boxed{x+۷y+۶=۰}_{BC}$$

$$AH=\frac{|(۱\times۴)+(۷\times۲)+۶|}{\sqrt{(۱)^۲+(۷)^۲}} \Rightarrow \boxed{AH=\frac{۲۴}{\sqrt{۵۰}}}\ ,\ M(\frac{۱+۸}{۲},\frac{-۱-۲}{۲}) \Rightarrow \boxed{M(\frac{۹}{۲},-\frac{۳}{۲})}$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{(۴-\frac{۹}{۲})^۲+(۲-(-\frac{۳}{۲}))^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۴۹}{۴}} \Rightarrow \boxed{AM=\sqrt{\frac{۵۰}{۴}}}$$

$$\Delta AHM: HM=\sqrt{AM^۲-AH^۲}=\sqrt{\frac{۵۰}{۴}-\frac{۵۷۶}{۵۰}}=\sqrt{\frac{۱۹۶}{۲۰۰}}=\frac{۱۴}{۱۰\sqrt{۲}} \Rightarrow \boxed{HM=\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}}$$

۱- نقطه دلخواهی روی محور y ها درنظر گرفته و به A,B وصل کنید،
تا تابعی دو ضابطه ای حاصل شود.



خواندنی : می توان تابع تک ضابطه ای(چند جمله ای) معرفی کرد.

اگر $A(x_A,y_A)\,,B(x_B,y_B)$ در این صورت

$$f(x)=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}y_B+\frac{x-x_B}{x_A-x_B}y_A+(x-x_A)(x-x_B).P(x)$$

که $P(x)$ چند جمله ای دلخواه از درجه n است ، در اینصورت
تابع f از درجه $n+۲$ خواهد بود.

۲- الف) نادرست.مثال نقض

$$f=\{(۱,۱),(۲,۲)\}\quad g=\{(۱,۲),(۲,۱)\}\quad D_f=D_g=\{۱,۲\}\quad R_f=R_g=\{۱,۲\}\ ,f\neq g$$

ب) درست (در این حالت تابع را پوشا گویند) ، چون برد زیر مجموعه همه دامنه است

$$f:A\to B\Rightarrow R_f\subseteq B$$

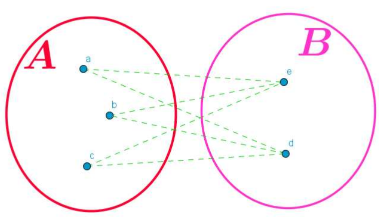
پ) نادرست، طبق ب

ت) درست، می توانیم دامنه را محدود کنیم $f(x)=kx\ ,k\in\mathbb{R}\,,x\in[۰,۳]$

یاتابع رادیکالی مقابل برای k مثبت دلخواه $g(x)=\sqrt{kx(۳-x)},\,k>۰$

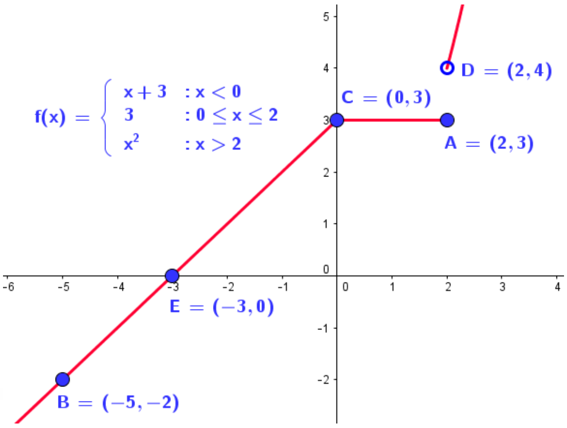
۳- هر تابع چند جمله ای دارای دامنه $\mathbb{R}$ است ، مثلا $f(x)=kx$ ، عدد k عددی حقیقی دلخواه

۴- نظیر هر یک از سه عضو دامنه ، هریک از عضوهای d,e می توانند قرار گیرند پس تعداد توابع $۲^۳=۸$ است.



$$\{(a,d),(b,d),(c,d)\},\{(a,d),(b,d),(c,e)\}$$
$$\{(a,d),(b,e),(c,d)\},\{(a,d),(b,e),(c,e)\}$$
$$\{(e,d),(b,d),(c,d)\},\{(e,d),(b,d),(c,e)\}$$
$$\{(e,d),(b,e),(c,d)\},\{(e,d),(b,e),(c,e)\}$$

۵- یادآوری : $f=g\Leftrightarrow\begin{cases}D_f=D_g\\ \forall x\in D_f=D_g\Rightarrow f(x)=g(x)\end{cases}$ پس $f=h\quad,\ g=s$



۶- $D_f = R_f = \mathbb{R}\ ,\ (-۳,۰) \in f\ ,(-۵,-۲) \in f$

$\Rightarrow m = \dfrac{۰-(-۲)}{-۳-(-۵)} = \dfrac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow y = x + b$

$\Rightarrow ۰ = -۳ + b \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow x < ۰ \quad y = x + ۳$

۷-

الف) $x = ۳۵ \Rightarrow M(۳۵) = ۲/۸۹(۳۵) + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱/۷۹_{cm}$

ب) $M(x) = ۱۸۵ \Rightarrow ۱۸۵ = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴ \Rightarrow x = \dfrac{۱۸۵ - ۷۰/۶۴}{۲/۸۹} \approx ۳۹/۵۷_{cm}$

پ) $x = ۴۰ \Rightarrow m(۴۰) = ۲/۷۵(۴۰) + ۷۱/۴۸ = ۱۸۱/۴۸_{cm}$

$m(x) = ۱۹۰ \Rightarrow ۱۹۰ = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸ \Rightarrow x = \dfrac{۱۹۰ - ۷۱/۴۸}{۲/۷۵} \approx ۴۳/۰۹_{cm}$

۱- الف) $f(x)=\frac{x-1}{2-x}$ $\quad 2-x=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

ب) $f(x)=\frac{-3x}{x^2+1}$ $\quad x^2+1=0 \quad \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\}=\mathbb{R}$

پ) $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+x-12}$ $\quad x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0\Rightarrow x=-4,3\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-4,3\}$

ت) $f(x)=\sqrt{3x+1}$ $\quad 3x+1\ge 0\Rightarrow x\ge -\frac{1}{3}\Rightarrow D_f=[-\frac{1}{3},+\infty)$

ث) $f(x)=2\sqrt{x}-3$ $\quad x\ge 0\Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

ج) $f(x)=\sqrt{8-x}$ $\quad 8-x\ge 0\Rightarrow x\le 8\Rightarrow D_f=(-\infty,8]$

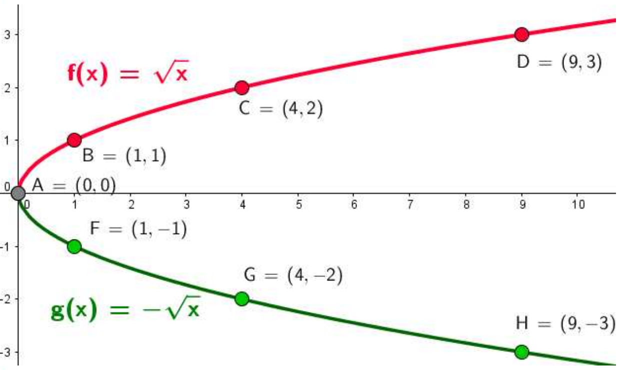
۲- در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ اگر $x\to -x$ خواهیم داشت $g(x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$ یعنی می توان نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه کردتانمودار g حاصل شود.

اگر $y\to -y$ خواهیم داشت $-y=\frac{1}{x}\Rightarrow y=g(x)=-\frac{1}{x}$ یعنی می توان نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرد تا نمودار g بدست آید.

۳- مقدار y به $-y$ تبدیل شده ، پس قرینه $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها می یابیم.

$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow$

x	۰	۱	۴	۹
y	۰	۱	۲	۳



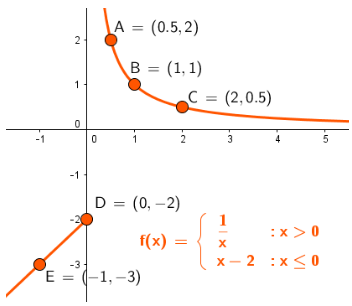
۴- الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x-2 & x\le 0\end{cases}$

$x>0\Rightarrow$

x	$\frac{1}{2}$	۱	۲
y	۲	۱	$\frac{1}{2}$

$x\le 0\Rightarrow$

x	۰	-1
y	-2	-3

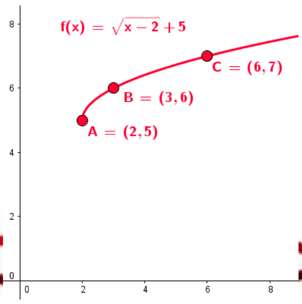


$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$R_f=(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$

ب) $f(x)=\sqrt{x-2}+5\Rightarrow$

x	۲	۳	۶
y	۵	۶	۷

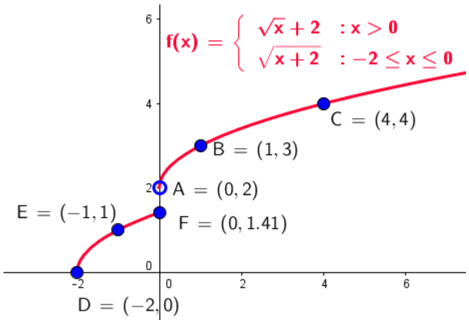


$\Rightarrow D_f=[2,+\infty)\ ,\ R_f=[5,+\infty)$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2 & x>0 \Rightarrow \\ \sqrt{x+2} & -2\le x\le 0 \Rightarrow\end{cases}$

x	0	1	4
y	2	3	4

x	-2	-1	0
y	0	1	$\sqrt{2}$



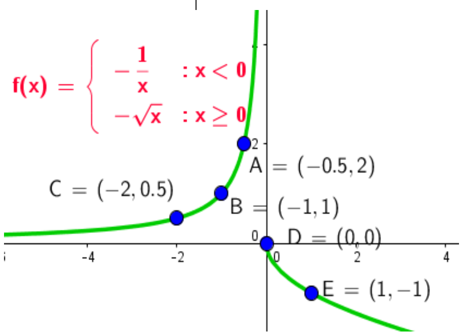
$D_f=[-2,+\infty)$

$R_f=[0,\sqrt{2}]\cup(2,+\infty)$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & x<0 \Rightarrow \\ -\sqrt{x} & x\ge 0 \Rightarrow\end{cases}$

x	$-\frac{1}{2}$	-1	-2
y	2	1	$\frac{1}{2}$

x	0	1	4
y	0	-1	-2



$D_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$R_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۵- الف) تابع خطی ب) تابع نیست، به ازای $x=1$ بیشمار مقدار برای y وجود دارد.

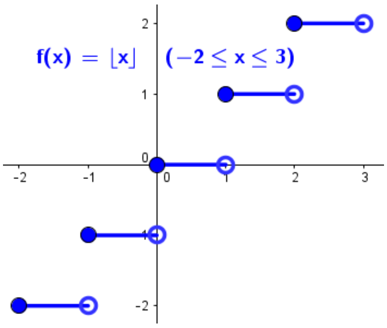
پ) تابع ثابت ت) تابع نیست ، به ازای $x=0$ ضابطه اول $y=3$ و ضابطه دوم $y=-1$ را می دهد.

ث) تابع نیست، به ازای $x=1$ داریم $y=\pm 1$ ج) تابع قدرمطلق

۶- الف) $f(50)=\dfrac{255(50)}{100-50}=255$ میلیون تومان

ب) $D_f=[0,100)$ درصد پاکسازی می تواند صفر باشد و تا کمتر از ۱۰۰ درصد امکان پزیر است ، پس

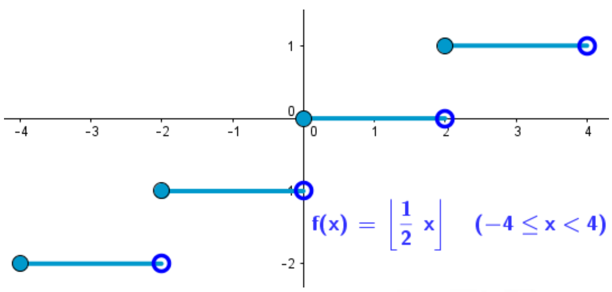
۷- الف)



$$f(x)=\begin{cases}-1 & -2\le x<-1\\ 0 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 3 & 2\le x<3\end{cases}$$

$$-4\le x<4\Rightarrow -2\le \frac{1}{2}x<2\Rightarrow$$

ب)



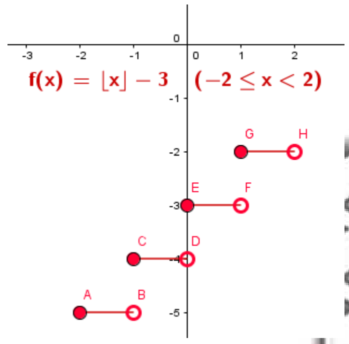
$$f(x)=\begin{cases}-2 & -2\le \frac{1}{2}x<-1\\ -1 & -1\le \frac{1}{2}x<0\\ 0 & 0\le \frac{1}{2}x<1\\ 1 & 1\le \frac{1}{2}x<2\end{cases}=\begin{cases}-2 & -4\le x<-2\\ -1 & -2\le x<0\\ 0 & 0\le x<2\\ 1 & 2\le x<4\end{cases}$$

۸- هر دو تابع را در بازه $[-2,2)$ رسم می کنیم.

$$f(x)=[x]-3=\begin{cases}-5 & -2\le x<-1\\ -4 & -1\le x<0\\ -3 & 0\le x<1\\ -2 & 1\le x<2\end{cases}\ \boxed{1}\ ,\ -2\le x<2\Rightarrow -5\le x-3<-1$$

$$\Rightarrow g(x)=[x-3]=\begin{cases}-5 & -5\le x-3<-4\Rightarrow -2\le x<-1\\ -4 & -4\le x-3<-3\Rightarrow -1\le x<0\\ -3 & -3\le x-3<-2\Rightarrow \quad 0\le x<1\\ -2 & -2\le x-3<-1\Rightarrow \quad 1\le x<2\end{cases}\ \boxed{2}$$

$$\Rightarrow f=g$$



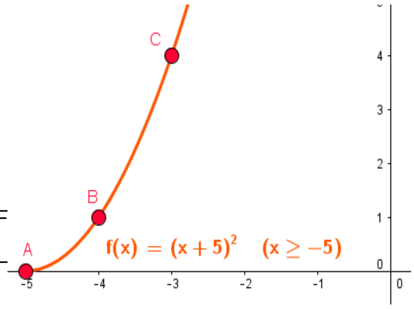
۹-

الف) $t=5\Rightarrow n(5)=\dfrac{9500(5)-2000}{4+5}\approx 5055$

ب) $5500=\dfrac{9500t-2000}{4+t}\Rightarrow 9500t-2000=22000+5500t\Rightarrow 4000t=24000\Rightarrow t=6_{month}$

۱- تابعی از دانش آموزان یازدهم ریاضی و نمره مستمر حسابان در کارنامه نیمسال اول ، هر دانش آموز فقط یک نمره دارد ولی چند دانش آموز ممکن است نمره یکسان داشته باشند.

۲- تابع $g(x)=\frac{5}{2}$ یک به یک نیست و تابع وارون وجود ندارد.

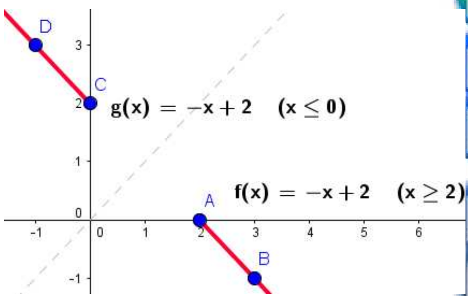
۳- 

الف) تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است ،

$\boxed{f(x)=(x+5)^2 \ , x\ge -5} \Rightarrow$

x	-5	-4	-3
y	0	1	4

$y=(x+5)^2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=(y+5)^2 \Rightarrow y+5=\pm\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{y=-5+\sqrt{x}}$

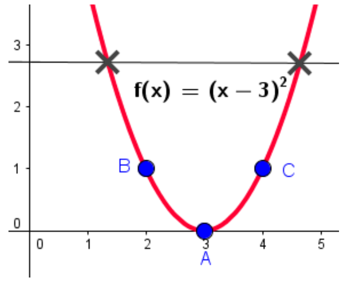


ب) تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است ،

$\boxed{f(x)=-|x-1|+1 \ , x\ge 2} \Rightarrow$

$x-1\ge 0 \Rightarrow y=-(x-1)+1 \Rightarrow y=-x+2 \ , x\ge 2 \Rightarrow y\le 0$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=-y+2 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=2-x \ , x\le 0}$

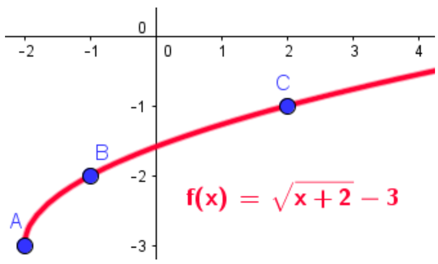
پ) 

$f(x)=(x-3)^2 \Rightarrow$

x	2	3	4
y	1	0	1

$\Rightarrow$

تابع f یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست.

ت) 

تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است.

$f(x)=\sqrt{x+2}-3 \Rightarrow y+3\ge 0 \Rightarrow \boxed{y\ge -3}$

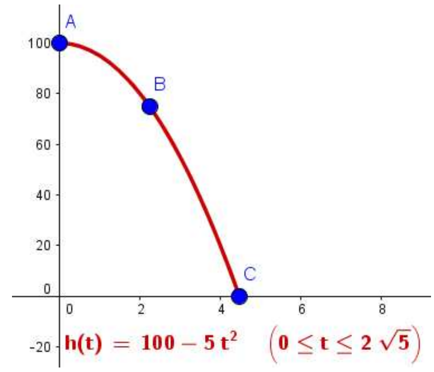
$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\sqrt{y+2}-3 \Rightarrow y+2=(x+3)^2$

$\Rightarrow y=\boxed{f^{-1}(x)=(x+3)^2-2 \ ، \ x\ge -3}$

۴- الف) ارتفاع h از ۱۰۰ به ۰ تغییر می کند که این ارتفاعها در زمانهای ۰ و $۲\sqrt{۵}$ اتفاق می افتد زیرا

$$h(t)=۱۰۰=۱۰۰-۵t^{۲}\Rightarrow t=۰\ ,\ h(t)=۰=۱۰۰-۵t^{۲}\Rightarrow t^{۲}=۲۰\Rightarrow t=۲\sqrt{۵}\Rightarrow D_h=[۰,۲\sqrt{۵}]\ ,\ R_h=[۰,۱۰۰]$$

ب)

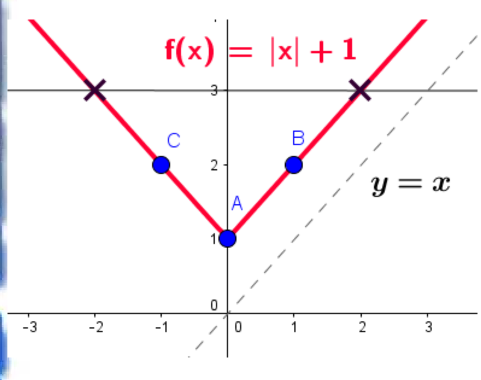


$$h(t)=۱۰۰-۵t^{۲}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} t & ۰ & \sqrt{۵} & ۲\sqrt{۵} \\ \hline h(t) & ۱۰۰ & ۷۵ & ۰ \end{array}\Rightarrow$$

تابع f یک به یک است پس وارون پزیر است.

پ) $$h(t)=y=۱۰۰-۵t^{۲}\ ,\ ۰\le t\le ۲\sqrt{۵}\xrightarrow{t\leftrightarrow y} t=۱۰۰-۵y^{۲}\Rightarrow y=\boxed{\sqrt{\frac{۱۰۰-t}{۵}}=h^{-۱}(t)}$$

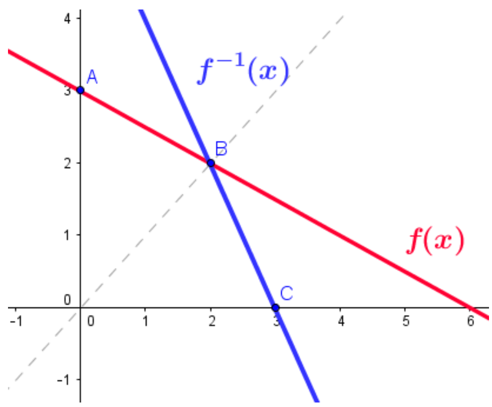
۵- می دانیم $y=x$ نیمساز ربع اول و سوم و نقاط بالای این خط داریم ، $y>x$ پس کافیست تابعی رسم کنیم که یک به یک نباشد وبالای نیمساز ربع اول و سوم باشد مانند $f(x)=|x|+۱$



۶-

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۳\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۳ & ۲ \end{array}\ ،\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=-\frac{۱}{۲}y+۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}y=۳-x\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲(۳-x)\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۳ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۲ \end{array}$$



۱-

$$f(x)=۴x \quad , \quad g(x)=۲-x \Rightarrow D_f=D_g=\mathbb{R}$$

$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۴x}{۲-x}, D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{۲\}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۴x-(۲-x)=۵x-۲ \ , D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲-x)=۴(۲-x) \ , D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid ۲-x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۲-

$$f(x)=\frac{۱}{x-۳}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}=\{x\neq ۳\} \qquad g(x)=\frac{۴}{x}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}=\{x\neq ۰\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{۴}{x}\right)=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}=\frac{x}{۴-۳x}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰ \mid \frac{۴}{x}\neq ۳\}=\mathbb{R}-\{۰,\frac{۴}{۳}\}$$

۳-

الف) نادرست $f(۷)=۵, g(۴)=۷\Rightarrow (fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵$

ب) درست $f(x)=x+۴, g(x)=۳x \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۲+۴}{۳(۲)}=\frac{۶}{۶}=۱$

پ) درست $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=۲x-۱\Rightarrow (fog)(۵)=f(g(۵))=f(۲(۵)-۱)=f(۹)=\sqrt{۹}=۳, g(۲)=۲(۲)-۱=۳$

ت) نادرست $f(x)=۲x, g(x)=x^۲\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲)=۲x^۲, (gof)(x)=g(f(x))=g(۲x)=۴x^۲$

ث) نادرست

$$f(x)=x^۲-۴ \ , \ g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=f(\sqrt{x^۲-۴})=(\sqrt{x^۲-۴})^۲-۴=x^۲-۸ \ (x\geq ۲ \vee x\leq -۲)$$

$$\Rightarrow (fog)(۵)=۵^۲-۸=۲۵-۸=۱۷$$

ج) ضرب توابع خاصیت جابجائی دارد، درست

۴-

$$D_f=\{۱,۲,۳,۴\} \ , \ D_g=\mathbb{N}\Rightarrow$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$$\Rightarrow f+g=\{(۱,f(۱)+g(۱)),(۲,f(۲)+g(۲)),(۳,f(۳)+g(۳)),(۴,f(۴)+g(۴))\}$$

$$=\{(۱,۴),(۲,۷),(۳,۱۱),(۴,۱۵)\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\{۱,۲,۳,۴\} \mid f(x)\in\mathbb{N}\}=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$$\Rightarrow fog=\{(۱,(gof)(۱)),(۲,(gof)(۲)),(۳,(gof)(۳)),(۴,(gof)(۴))\}$$

$$=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۱۰),(۴,۱۴)\}$$

۵-

$$D_f=\{-۴,-۱,۰,\frac{۵}{۲},۳\}\ ,\ D_g=\{-۴,-۲,۰,۳,۵,۹\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}D_{f+g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{-۴,۰,۳\}\\ D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=\{-۴,۰,۳\}-\{۳\}=\{-۴,۰\}\end{cases}$$

$$f+g=\{(-۴,f(-۴)+g(-۴)),(۰,f(۰)+g(۰)),(۳,f(۳)+g(۳))\}=\{(-۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$$

$$f-g=\{(-۴,f(-۴)-g(-۴)),(۰,f(۰)-g(۰)),(۳,f(۳)-g(۳))\}=\{(-۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$$

$$f/g=\{(-۴,f(-۴)/g(-۴)),(۰,f(۰)/g(۰))\}=\{(-۴,-\frac{۱۳}{۷}),(۰,-\frac{۵}{۳})\}$$

۶-

$$f(x)=\sqrt{x^۲+۵}\overset{D_f}{\Rightarrow}x^۲+۵\ge۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}\qquad g(x)=\sqrt{۴-x^۲}\overset{D_g}{\Rightarrow}۴-x^۲\ge۰\Rightarrow|x|\le۲\Rightarrow-۲\le x\le۲$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{-۲\le x\le۲\mid\sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}\}=[-۲,۲]$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{۴-x^۲})=\sqrt{(\sqrt{۴-x^۲})^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid-۲\le\sqrt{x^۲+۵}\le۲\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲\le-۱\}=\varnothing$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x^۲+۵})=\sqrt{۴-(\sqrt{x^۲+۵})^۲}=\sqrt{-۱-x^۲}\Rightarrow gof=\{\}$$

۷- عدد $x=-۳$ در دامنه تابع $\frac{f}{g}$ قرار ندارد.

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{-۳\}=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

۸-

$$f(x)=۲x+۵\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=۲y+۵\Rightarrow y=\boxed{\frac{x-۵}{۲}=f^{-۱}(x)}$$

$$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=f(\frac{x-۵}{۲})=۲(\frac{x-۵}{۲})+۵=x-۵+۵=x$$

$$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=f^{-۱}(۲x+۵)=\frac{(۲x+۵)-۵}{۲}=x$$

۹- با توجه به شیب و عرض از مبدا دو تابع f,g داریم $\quad f(x)=-\frac{۲}{۵}x+۲,g(x)=\frac{۳}{۲}x-۳$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-\frac{۲}{۵}x+۲+\frac{۳}{۲}x-۳=\frac{۱۱}{۱۰}x-۱$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=-\frac{۲}{۵}x+۲-\frac{۳}{۲}x+۳=-\frac{۱۹}{۱۰}x+۵$$

$$(fg)(x)=f(x).g(x)=(-\frac{۲}{۵}x+۲)(\frac{۳}{۲}x-۳)$$

۱۰- الف) $(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۲+(-۱)=۱$

ب) $(f+g)(-۳)=f(-۳)+g(-۳)\boxed{\times}\ -۳\notin D_f$

پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲}).g(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۵}{۲}}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

ت) $(fog)(-۴)=f(g(-۴))=g(۵)=\sqrt{۷}$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲}$

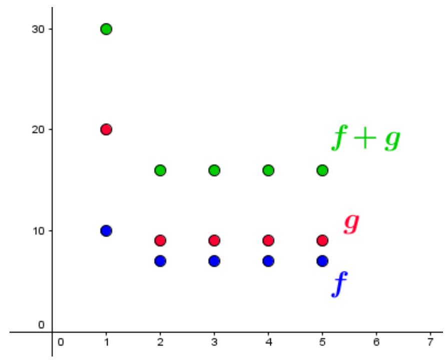
ج) $(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۰$

۱۱- $$y=ax+b\overset{x\leftrightarrow y}{\Rightarrow}x=ay+b\Rightarrow ay=x-b\Rightarrow y=\frac{x-b}{a}=\boxed{\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}=f^{-۱}(x)}$$

۱۲- $$f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)=y\overset{x\leftrightarrow y}{\Rightarrow}x=\frac{۵}{۹}(y-۳۲)\Rightarrow y-۳۲=\frac{۹}{۵}x\Rightarrow y=\boxed{f^{-۱}(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲}$$

۱۳- $$f(x)=\begin{cases}۱۰ & x=۱\\ ۷ & x\in\mathbb{N}-\{۱\}\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}۲۰ & x=۱\\ ۹ & x\in\mathbb{N}-\{۱\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(f+g)(x)=\begin{cases}۳۰ & x=۱\\ ۱۶ & x\in\mathbb{N}-\{۱\}\end{cases}$$



۱- الف)

t	۰	۱	۲	۳
m	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۸۰۰

$\Rightarrow m(t)=100\times 2^{t}$

ب) $m(20)=100\times 2^{20}\approx 10^{8}{}_{mg}=10^{5}{}_{gr}$

۲- نمودار تابع $y=2^x$ سبزرنگ ، نمودار تابع $y=2^x+1$ قرمز رنگ و نمودار تابع $y=2^x-1$ آبی رنگ است.
نمودار توابع $y=a^x+2$ و $y=a^x-2$ از انتقال نمودار تابع $y=a^x$ به ترتیب به اندازه ۲ واحد به بالا و ۲ واحد به پایین بدست می آیند.

۳- الف) $A(8)=10(0/8)^{8}\approx 10(0/16)=1/6_{mg}$ ب) $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}\times 100=\dfrac{10(0/8)^{t+1}}{10(0/8)^{t}}\times 100=80\%$

۴- الف) $3^{2/5}=3^{\frac{5}{2}}=3^{\sqrt{\frac{25}{4}}}\ \boxed{<x<}\ 3^{\sqrt{10}}=3^{\sqrt{\frac{40}{4}}}\Rightarrow x=3^{\sqrt{\frac{26}{4}}},3^{\sqrt{\frac{27}{4}}},3^{\sqrt{\frac{28}{4}}},...$

ب) $4^{2x-1}>\dfrac{1}{1024}\Rightarrow 2^{4x-2}>2^{-10}\xrightarrow{2>1}4x-2>-10\Rightarrow 4x>-8\Rightarrow x>-2$

پ) چون تابع $y=a^x$ برای $a>1$ تابعی اکیدا صعودی است پس $x>y>z$

۵- الف) در نمودار قرمز $3^{1-\sqrt{2}}\approx 3^{-0/4}=f(-0/4)\approx 0/7$, $cal\Rightarrow 3^{1-\sqrt{2}}\approx 0/634$

ب) در نمودار آبی $2^{1/25}=g(1/25)\approx 2/2$, $cal\Rightarrow 2^{1/25}\approx 2/378$

پ) در نمودار قرمز $3^{\frac{3}{2}}\approx 3^{1/5}=f(1/5)\approx 5$, $cal\Rightarrow 3^{1/5}\approx 5/196$

۶- الف) $2^x=\dfrac{13}{2}=6/5\ ,\ 2^3=8,2^4=16\Rightarrow 3<x<4$ ب) $2^x=\sqrt{7}\approx 2/6\ ,\ 2^1=2,2^2=4\Rightarrow 1<x<2$

۷- الف) اگر n تعداد فیلتر و $P(n)$ درصد ناخالصی باقیمانده باشد ،

n	۰	۱	۲	۳
P	۱۰۰	$0/7\times 100$	$(0/7)^2\times 100$	$(0/7)^3\times 100$

$\Rightarrow P(n)=(0/7)^{n}\times 100$

ب) از بین رفتن بیش از ۹۶٪ ناخالصی یعنی کمتر از ۴٪ ناخالصی باقی بماند ،

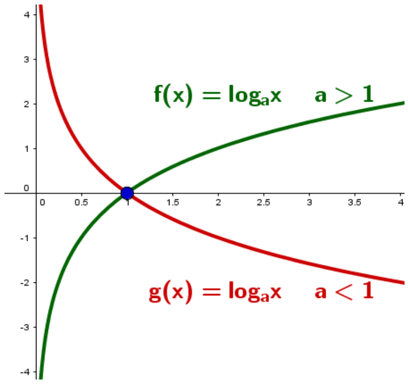
$P(n)<4\Rightarrow 100(0/7)^n<4\Rightarrow (0/7)^n<0/04,\begin{cases}0/7^{9}\approx 0/0403\\ 0/7^{10}\approx 0/0282\end{cases}\Rightarrow$ حداقل ۱۰ لایه فیلتر لازم است

۱-

$\log_{۶} \frac{۱}{۶} = a \Rightarrow ۶^{a} = \frac{۱}{۶} = ۶^{-۱} \Rightarrow a = -۱$ $\qquad$ $\log_{۱۰} ۰/۰۱ = a \Rightarrow ۱۰^{a} = ۰/۰۱ = ۱۰^{-۲} \Rightarrow a = -۲$

$\log_{۷} \sqrt[۳]{۷^{۲}} = a \Rightarrow ۷^{a} = \sqrt[۳]{۷^{۲}} = ۷^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$ $\qquad$ $\log_{۲} \sqrt{۲} = a \Rightarrow ۲^{a} = \sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

۲- هر دو تابع یک به یک بوده و از $A(۱,۰)$ می گذرند و نمودار تابع f قرینه تابع g نسبت به محور x هاست.



۳-

الف) $\begin{cases} y = ۲۷ \\ y = ۳^{x} \end{cases} \Rightarrow ۳^{x} = ۲۷ = ۳^{۳} \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow A(۳,۲۷)$

ب) $\begin{cases} y = ۱۰ \\ y = (۰/۰۱)^{x} \end{cases} \Rightarrow (۰/۰۱)^{x} = ۱۰ \Rightarrow (۱۰^{-۲})^{x} = ۱۰ \Rightarrow -۲x = ۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow B(-\frac{۱}{۲},۱۰)$

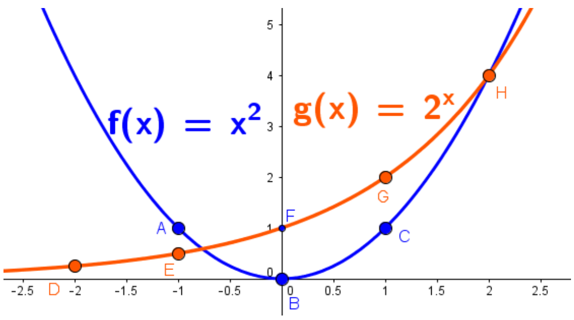
۴-

$f(x) = x^{۲} \Rightarrow$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

$g(x) = ۲^{x} \Rightarrow$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



تابع $f(x) = x^{۲}$ تابعی یک به یک نیست و محور عرضها ، محور تقارن آن است ولی تابع $g(x) = ۲^{x}$ یک به یک می باشد و این دو تابع در $(۲,۲)$ و نقطه ای با طولی بین $-۱,-۰/۵$ متقاطعند.

۵- نادرست . مثال نقض $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$ درست ، طبق تعریف لگاریتم

درست. تابع لگاریتم یک به یک است.

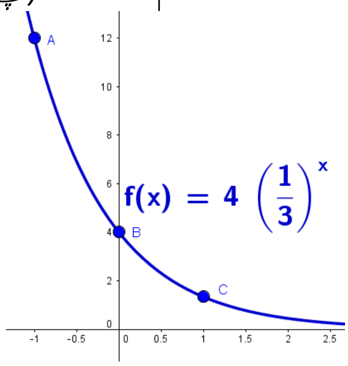
نادرست. در محل قطع محور y ها داریم $x=0$ که لگاریتم در $x=0$ تعریف نشده است.

درست . زیرا تابع $y=a^x \quad a>0, a\neq 1$ و تابع $y=\log_a x \quad a>0, a\neq 1$ وارون هم اند.

نادرست. مثال نقض $\log_{0.1}10=1 \boxed{>} \log_{0.1}100=2 \quad , \quad 100>10>0$

۶- پ) $y=4(\frac{1}{3})^x$

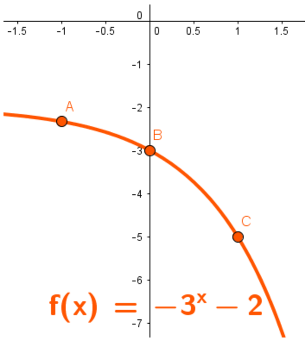
x	-1	0	1



ب) $y=-3^x-2$

$\Rightarrow$

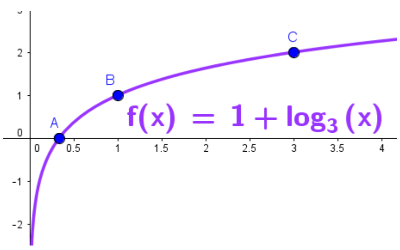
x	-1	0	1
y	$-\frac{7}{3}$	-3	-5



الف) $y=1+\log_3 x$

$\Rightarrow$

x	$\frac{1}{3}$	1	3
y	0	1	2



۱- الف) $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0 \Rightarrow \log_4 \frac{m^2}{m} = 3 \Rightarrow m = 4^3 = 64$

ب) $\log_2(12b-21) - \log_2(b^2-3) = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{12b-21}{b^2-3} = 2 \Rightarrow \frac{12b-21}{b^2-3} = 2^2$

$\Rightarrow 4b^2 - 12 = 12b - 21 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 9 = 0 \Rightarrow (2b-3)^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

$12b - 21 > 0, b = \frac{3}{2} \Rightarrow 12(\frac{3}{2}) - 21 = -3 < 0 \boxed{\times}$

پ) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2-1) = -1 \Rightarrow x^2 - 1 = (\frac{1}{10})^{-1} \Rightarrow x^2 - 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$

$x^2 - 1 > 0, x = \pm\sqrt{11} \Rightarrow (\pm\sqrt{11})^2 - 1 = 10 > 0 \Rightarrow \square$

۲- الف) $m(t) = 2^t \Rightarrow \log_2 m(t) = t$ زمانی را نشان می دهد که جرم باکتری $m(t)$ است .

ب) $t = \log_2 5000 = \log_2 \frac{10000}{2} = \frac{\log 10000 - \log 2}{\log 2} = \frac{4 - 0/301}{0/301} \approx 12/28$

۳- الف) نادرست $a^{\log_b a} = a \Rightarrow \log_b a = 1 \Rightarrow a = b$

ب) درست $\log_d abc = \log_d (ab)c = \log_d (ab) + \log_d c = \log_d a + \log_d b + \log_d c$

پ) نادرست، $\log x + \log y = \log(xy) \neq \log x . \log y$

ت) نادرست، $\log \frac{1}{10} = -1$

۴- الف)

t	0	4	8	12
m	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\Rightarrow m(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{4}}$

ب) $m(t) = 0/01 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{\frac{t}{4}} = 0/01 \Rightarrow \frac{t}{4} = \log_{\frac{1}{2}} 0/01 = \frac{\log 0/01}{\log \frac{1}{2}} = \frac{-2}{-\log 2} \Rightarrow t = \frac{8}{\log 2} = \frac{8}{0/301} \approx 26/5$

۵- الف) $\log(18 \times 375) = \log(2 \times 3^2 \times 3 \times 5^3) = \log(2 \times 3^3 \times 5^3) = \log 2 + 3\log 3 + 3\log 5$
$\approx 0/301 + 3(0/4771) + 3(1 - 0/301) = 3/8293$

ب) $\log\sqrt{0/75} = \log\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{4} = \frac{1}{2}(\log 3 - 2\log 2) \approx \frac{1}{2}(0/4771 - 2(0/301)) = -0/06245$

پ) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}} = \log_2 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \log_2 2^{(\frac{3}{2}-\frac{1}{4})} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

۶- $(\frac{۱}{۲},-۴)\in f \Rightarrow -۴=\log_a(\frac{۱}{۲})=\log_a ۲^{-۱}=-\log_a ۲\Rightarrow \log_a ۲=۴\Rightarrow a^۴=۲\Rightarrow a=\sqrt[۴]{۲}$

۷- الف) $\square$ $\log_b a\times\log_a b=\frac{\log a}{\log b}\times\frac{\log b}{\log a}=۱$

ب) $\square$ $\log ۳+\log ۲=\log(۳\times۲)=\log ۶\neq\log ۵$

۸-

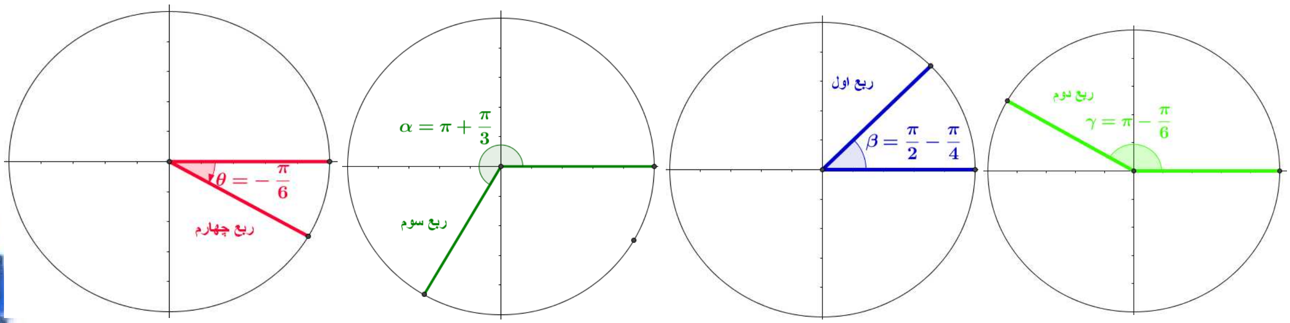
t	۰	۳۰	۶۰	۹۰
m	۱۲۸	$۱۲۸(\frac{۱}{۲})$	$۱۲۸(\frac{۱}{۴})$	$۱۲۸(\frac{۱}{۸})$

$$\Rightarrow m(t)=۱۲۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۳۰}}\ ,\ t=۳۰۰\Rightarrow m(۳۰۰)=۱۲۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳۰۰}{۳۰}}=۲^۷\times۲^{-۱۰}=\frac{۱}{۸}$$

یادآوری : اگر نیمه عمر ماده ای $t_\circ$ و جرم اولیه $m_\circ$ باشد ، جرم باقیمانده پس از زمان t برابر است با

$$m(t)=m_\circ\times(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{t_\circ}}$$

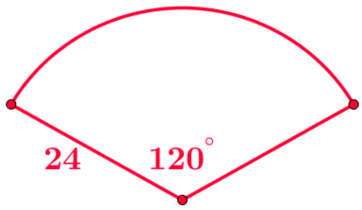
۱-



۲-

الف) $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۱۲۰\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}_{rad}$

ب) $\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r.\theta = ۲۴ \times \frac{۲\pi}{۳} = ۱۶\pi \approx ۵۰/۲۴_{cm}$



۳- اندازه کمان این قطاع برابر محیط قاعده مخروط $۲\pi(۶) = ۱۲\pi$ است و

شعاع این قطاع برابر $r' = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = ۱۰$ است ، پس اندازه زاویه قطاع برابر

$$\theta = \frac{l}{r'} = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = \frac{۶\pi}{۵} = ۲۱۶^\circ$$

۴-

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳۶^\circ \times \pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۵} \ , \ \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta = ۶۳۲۰ \times \frac{\pi}{۵} = ۱۲۶۴\pi \approx ۳۹۶۹_{km}$$

۱- الف) $\sin(۳۰۰^\circ)=\sin(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)=-\sin(۶۰^\circ)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\cot(۷۵۰^\circ)=\cot(۴(۱۸۰^\circ)+۳۰^\circ)=\cot(۳۰^\circ)=\sqrt{۳}$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{۶})=\cos(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ت) $\cos(-\frac{۲۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۲۴\pi-\pi}{۴})=\cos(۶\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ث) $\sin(\frac{۵\pi}{۴})=\sin(\frac{۴\pi+\pi}{۴})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ج) $\tan(-۸۴۰^\circ)=-\tan(۸۴۰^\circ)=-\tan(۹۰۰^\circ-۶۰^\circ)=-(-\tan(۶۰^\circ))=\sqrt{۳}$

چ) $\tan(-۱۵۰^\circ)=-\tan(۱۵۰^\circ)=-\tan(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-(-\tan(۳۰^\circ))=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ح) $\cos(\frac{۹\pi}{۴})=\cos(\frac{۸\pi+\pi}{۴})=\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

خ) $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳})=\tan(\frac{۹\pi+\pi}{۳})=\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan(\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}$

۲- الف) $\theta=\frac{\pi}{۲}-\alpha\Rightarrow I=k.\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=k.\sin\theta\Rightarrow \boxed{I=k.\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)}$

ب) $\theta=۰\Rightarrow I=k.\sin(۰)=۰\ ,\ \theta=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow I=k.\sin(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}k\ ,\ \theta=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow I=k.\sin(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}k$

پ) k عددی ثابت و مثبت است پس بیشترین مقدار I وقتی است که

$I=k.\sin\theta\ ,\ \sin\theta=۱\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{۲}=۹۰^\circ}\Rightarrow\boxed{I=k}$

۳- الف) درست $\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=\cos\theta+(-\cos\theta)=۰$

ب) نادرست $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)+\cos\theta=\cos\theta+\cos\theta=۲\cos\theta\neq۱$

پ) درست $\cos(-\theta)=\cos\theta\Rightarrow\cos(-۷)=\cos(۷)$

ت) درست $\left.\begin{array}{l}\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\\ \tan\pi-\tan\theta=۰-\tan\theta=-\tan\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\tan(\pi-\theta)=\tan\pi-\tan\theta$

۱- الف) وسط(قرمز) ، نمودار تابع $y=\sin x$ رسم شده و قسمت پایین محور طولها، نسبت به محور طولها قرینه شده و آنگاه کل نمودار نسبت به محور طولها قرینه شده است. $\sin x \to |\sin x| \to -|\sin x|$

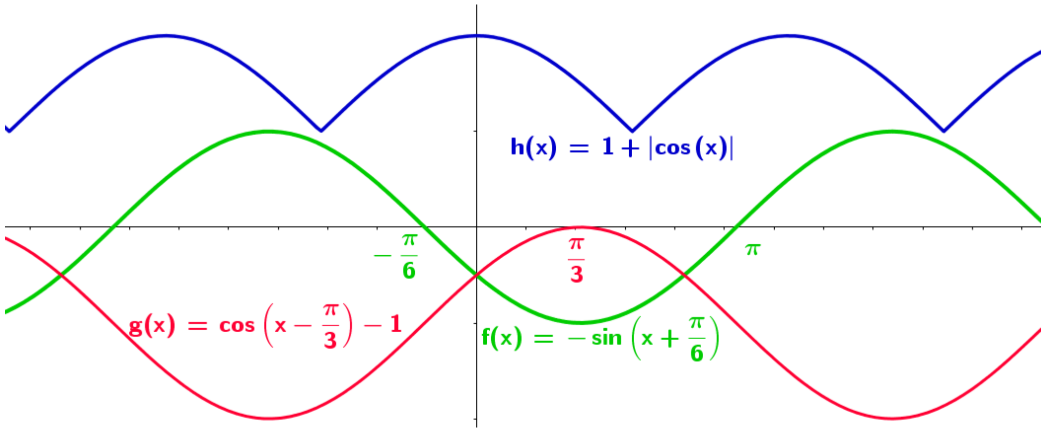
ب) راست(سبز) ، نمودار $y=\cos x$ رسم شده و $\frac{\pi}{۶}$ واحد به چپ منتقل شده است.

پ) چپ(آبی) ، نمودار $y=\sin x$ رسم شده و $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست منتقل شده است.

۲- الف) سبز، نمودار $y=\sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{۶}$ به چپ منقل و سپس نسبت به محور طولها قرینه شده است.

ب) قرمز ، نمودار $y=\cos x$ به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ به راست و ۱ واحد به پایین منتقل شده است.

پ) آبی ، پایین نمودار $y=\cos x$ نسبت به محور طولها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا منتقل شده است.



۳-

الف) $A_{\min}=(\frac{\pi}{۳},-۱)\quad B_{\max}=(-\frac{۲\pi}{۳},۱)$

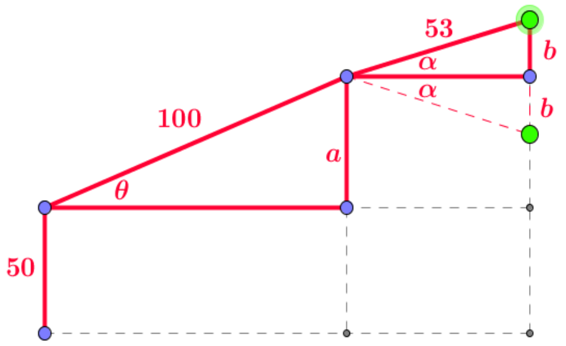
ب) $A_{\min}=(\frac{۴\pi}{۳},-۲)\quad B_{\max}=(\frac{\pi}{۳},۰)$

پ) $A_{\min}=(\frac{\pi}{۲},۱)\quad B_{\max}=(۰,۲)$

تذکر: در (الف)(ب) اگر به طول نقاط ۲π اضافه کنیم ، نقاط max, min دیگری خواهیم داشت و در (پ) اگر به طول نقاط π اضافه کنیم ؛ نقاط max, min دیگری بدست می آید.

٤- هیچکدام از سه تابع در $(۰,\pi)$ یک به یک نیستند.

۵- الف)



$\sin\theta=\frac{a}{۱۰۰}\Rightarrow a=۱۰۰\sin\theta\ ,\ \sin\alpha=\frac{b}{۵۳}\Rightarrow b=۵۳\sin\alpha$

$\Rightarrow \boxed{h=۵۰+۱۰۰\sin\theta+۵۳\sin\alpha}$

ب)

$\alpha=-۳۰^\circ\ ,h=۲۳/۵\ ,\ h=۵۰+۱۰۰\sin\theta+۵۳\sin\alpha$

$\Rightarrow ۲۳/۵=۵۰+۱۰۰\sin\theta+۵۳\sin(-۳۰^\circ)\Rightarrow ۱۰۰\sin\theta=۲۳/۵-۵۳(-\frac{۱}{۲})-۵۰=۰\Rightarrow\theta=۰$

پس بازوی بزرگتر روبات باید موازی محور افقی باشد.

۱- الف) $\cos ۱۵^\circ = \cos(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) = \cos ۴۵^\circ \times \cos ۳۰^\circ + \sin ۴۵^\circ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

ب) $\tan ۱۰۵^\circ = \tan(۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ + \tan ۴۵^\circ}{۱ - \tan ۶۰^\circ \times \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۱-\sqrt{۳}} \times \frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۴+۲\sqrt{۳}}{-۲} = -(۲+\sqrt{۳})$

پ) $\sin \frac{\pi}{۱۲} = \sin ۱۵^\circ = \sin(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \times \cos ۳۰^\circ - \cos ۴۵^\circ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

ت) $\sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ث) $\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲- الف)

$$۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin \alpha = +\sqrt{۱ - \cos^۲ \alpha} = \sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \beta = +\sqrt{۱ - \cos^۲ \beta} = \sqrt{۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = \frac{۵}{۱۳}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta = \frac{۳}{۵} \times (-\frac{۱۲}{۱۳}) + \frac{۴}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{-۳۶+۲۰}{۶۵} = -\frac{۱۶}{۶۵}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta = \frac{۴}{۵} \times (-\frac{۱۲}{۱۳}) + \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{-۴۸+۱۵}{۶۵} = -\frac{-۳۳}{۶۵}$$

ب) انتهای α در ربع اول و انتهای β در ربع دوم قراردارد پس انتهای $\alpha+\beta$ در ربع سوم قرار می گیرد

۳- الف)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta \ , \ \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha.\cos\alpha + \cos\alpha.\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha}$$

ب)

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta \ , \ \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha}$$

پ) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \xrightarrow{\sin^۲\alpha = ۱-\cos^۲\alpha} \cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - (۱-\cos^۲\alpha) = ۲\cos^۲\alpha - ۱$

ت) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \xrightarrow{\cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha} \cos ۲\alpha = (۱-\sin^۲\alpha) - \sin^۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha - ۱$

۴-

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \xrightarrow{\alpha = ۲۲/۵^\circ} \cos ۴۵^\circ = ۲\cos^۲ ۲۲/۵^\circ - ۱ \Rightarrow \cos ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \xrightarrow{\alpha = ۲۲/۵^\circ} \cos ۴۵^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۲۲/۵^\circ \Rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

---

www.riazi.ir

۱- $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=۲$ این تمرین نشان می دهد اینکه تابع در $x=a$ تعریف شده باشد یا نباشد در حد و وجود آن در نقطه تاثیری ندارد و تنها همسایگی نقطه مهم هست.

۲- $\lim\limits_{x\to ۱}(۲x+۱)=۳$ $\lim\limits_{x\to ۲}(-x^{۲}+۲x+۴)=۴$ $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۴$ $\lim\limits_{x\to -۱^{+}}\sqrt{x+۱}=۰$ $\lim\limits_{x\to -۱^{-}}\sqrt{x+۱}\boxed{\times}$

۳- الف) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۳x+۴)=۴$

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\to$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	$۰/۵$	۱
$f(x)$	۷	$۶/۷$	$۴/۳$	$۴/۰۳$	$\to$	۴	$\leftarrow$	$۳/۹۹۷$	$۳/۹۷$	$۳/۷$	$۲/۵$	۱

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=-۵$ $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱\\ ۳ & x=-۱\end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\to$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	$-۵/۵$	$-۵/۱$	$-۵/۰۱$	$-۵/۰۰۱$	$\to$	-۵	$\leftarrow$	$-۴/۹۹۹$	$-۴/۹۹$	$-۴/۹$	$-۴/۸$

۴- الف) خیر ، $f(۲)$ وجود ندارد.

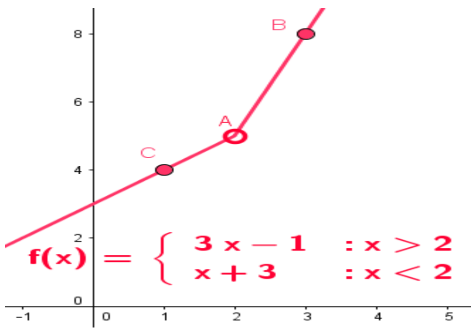
ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$

x	$۱/۹$	$۱/۹۹$	$۱/۹۹$	$\to$	۲	۲	$\leftarrow$	$۲/۰۰۱$	$۲/۰۱$	$۲/۱$
$f(x)$	$۴/۹$	$۴/۹۹$	$۴/۹۹۹$	$\to$	۵	۵	$\leftarrow$	$۵/۰۰۱$	$۵/۰۱$	$۵/۱$

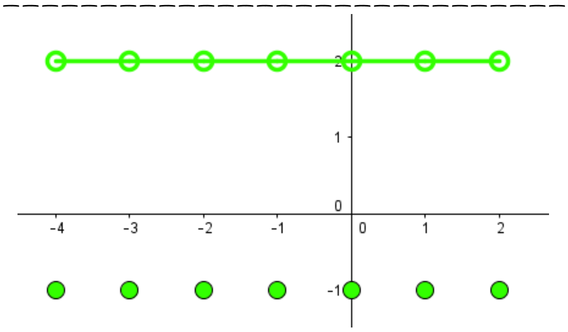
$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \Rightarrow \\ x+۳ & x<۲ \Rightarrow \end{cases}$

x	۲	۳
y	۵	۸

x	۲	۱
y	۵	۴



۵- الف)



ب) $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۲$, $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x)=۲$

۶- الف) $\left.\begin{array}{l}1-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 1\Rightarrow |x|\leq 1\Rightarrow -1\leq x\leq 1\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=[-1,1]-\{0\}=[-1,0)\cup(0,1]$

ب) با توجه به دامنه بدست آمده ، شامل همسایگی محذوف عدد صفر است

پ) بله همسایگی برای ۰/۹ وجود دارد که تابع در آن تعریف شده است مثلا (۰/۸ , ۱)

ت) در همسایگی چپ ۱ تعریف شده مثلا (۰/۹,۱) ولی در هیچ همسایگی راست ۱ تعریف نشده است

۷- عدد ۲ باید متعلق به این همسایگی باشد ، پس

$$2\in(x-1\,,\,2x+3)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1<2\Rightarrow x<3\\ 2x+3>2\Rightarrow x>-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<3\Rightarrow x\in(-\frac{1}{2},3)$$

---

www.riazi.ir

۱- الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$

ب) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)\ \boxed{\times}\\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=3\end{array}\right.\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} f(x)$ وجود ندارد

ت) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ وجود ندارد

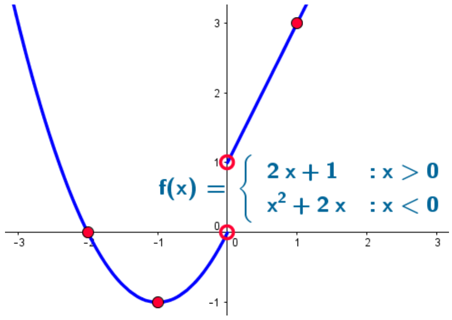
ث) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-1$

ج) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=1$

چ) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=1$

۲-

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\Rightarrow \begin{array}{c|cc}x&0&1\\ \hline y&1&3\end{array}\\[2ex] x^2+2x & x<0\Rightarrow \begin{array}{c|ccc}x&-2&-1&0\\ \hline y&0&-1&0\end{array}\end{cases}$$



الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ پ) حد چپ و راست در $x=0$ برابر نیست پس در $x=0$ حد ندارد

۳- تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و دراین نقطه حد دارد. (الف)(ب)(ج)

تابع درهمسایگی ۲ تعریف شده ودراین نقطه حدداردولی مقدارحدبامقدارتابع دراین نقطه برابرنیست. (الف)(ج)

تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و دراین نقطه حد ندارد. (پ)(ت)(ث)

تابع درهمسایگی ۲ تعریف شده ودراین نقطه حدداردوحدآن با مقدارتابع دراین نقطه برابر است. (ب)

تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده و دراین نقطه حد ندارد. (ت)(ث)

۴- $f(x)=\sqrt{x^2-x}\Rightarrow x^2-x\ge 0\Rightarrow x\ge 1\vee x\le 0\Rightarrow \boxed{D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)}$

تابع f در هیچ همسایگی چپ ۱ تعریف نشده است ، پس در $x=1$ حد چپ ندارد.

۵- $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}\Rightarrow [x]-2=0\Rightarrow [x]=2\Rightarrow 2\le x<3\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[2,3)=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$

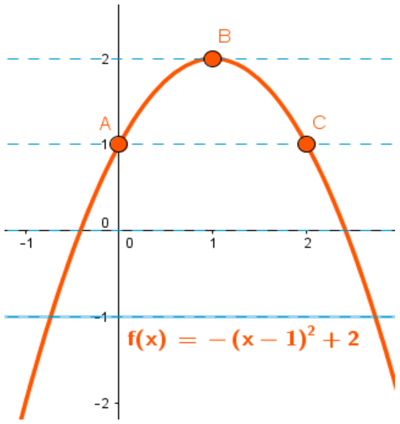
تابع f در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است ، پس در $x=2$ حد راست ندارد.

۶- الف) با توجه به شکل در یک همسایگی ۱ داریم ،

$$1 < f(x) < 2 \Rightarrow [f(x)] = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

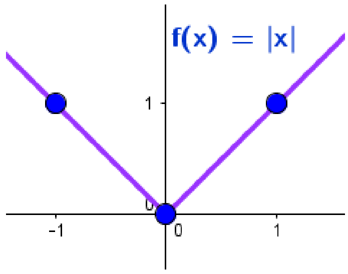
ب) با توجه به شکل حد تابع f در $x = 1$ برابر است با ،

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \Rightarrow [\lim_{x \to 1} f(x)] = [1] = 1$$



۷- الف) $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

ب) درست ، $\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to a} |x| = a$



$f(x) = |x| \Rightarrow$

x	-1	0	1
y	1	0	1

۱- ب) $\lim\limits_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5)=-6(-1)^7-4(-1)^2+5=7$ الف) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3=(\sqrt{9}-9)^3=-216$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}}\dfrac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)}=\dfrac{(-\frac{5}{3}+\pi)(3(-\frac{5}{3})+5)}{(3(-\frac{5}{3})+6)((-\frac{5}{3})^3+1)}=\dfrac{(-\frac{5}{3}+\pi)(0)}{1(-\frac{125}{27}+1)}=0$

ت) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=\dfrac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ ث) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+6x}=\sqrt{4(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})}=\sqrt{1+3}=2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}=\dfrac{\sin 0}{0+\cos 0}=\dfrac{0}{1}=0$ چ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}=\dfrac{|\cos\frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2}-\pi}=\dfrac{0}{-\frac{\pi}{2}}=0$

تذکر: در تمرینهای بالا از قضایای حد استفاده شده که به طور خلاصه آن است که در توابع برای یافتن حد در یک نقطه به شرط آن که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده باشد و نقطه مورد نظر نقطه مرزی تابع نباشد، عدد مورد نظر را در ضابطه تابع قرار داده و محاسبه کنیم.

یادآوری: نقطه مرزی نقطه است که ضابطه به ازای مقادیر بزرگتر یا کوچکتر آن متفاوت است.

۲- خیر مثلا در تابع $f(x)=(x-1)(x-2)+3$ داریم $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$ ولی f تابع ثابت نیست.

۳- $g(x)=12\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{12}{x^2-1}=\dfrac{12}{4-1}=4$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}L=L-L=0$

۴- قضیه دو شرطی است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0\\ \lim\limits_{x\to a}L=L\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)+L=0+L\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$$

$y=3x+2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$

$y=x^2-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$

۵- الف)

$$y=[x]-1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}([x]-1)=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}([x]-1)=0-1=-1\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}([x]-1)\ \boxed{\times}$$

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(2)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(-2)=-2\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)\ \boxed{\times}$$

ب) هر سه تابع $f(x)=۳x+۲\,,\,g(x)=x^۲-۱\,,(f+g)(x)=x^۲+۳x+۱$ در $x=۱$ حد دارند و

$$\lim_{x\to ۱}(f+g)(x)=\lim_{x\to ۱}x^۲+۳x+۱=۵$$

تابع $f.g$ در ۱ حد دارد ولی f در ۱ حد ندارد که

$$f(x)=[x]-۱\ ,\ g(x)=x^۲-۱\Rightarrow (f.g)(x)=(x^۲-۱)([x]-۱)\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(f.g)(x)=۰$$

توابع $f\,,g$ در ۱ حد راست دارند ولی $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد که

$$f(x)=۳x+۲\,,\ g(x)=x^۲-۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}(\frac{f}{g})(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۳x+۲}{x^۲-۱}=\frac{۵}{۰}\boxed{\times}$$

تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد ولی تابع f در ۱ حد ندارد که

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}\Rightarrow f^۲(x)=۴\,,x\neq ۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱}f^۲(x)=۴$$

تابع f در ۱ حد دارد ولی تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد که

$$f(x)=x^۲-۱\Rightarrow g(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^۲-۱}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to ۱^+}g(x)=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲-۱}=۰\\ \lim_{x\to ۱^-}g(x)=\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{x^۲-۱}\boxed{\times}\end{cases}$$ $\sqrt{f}$ در ۱ حد چپ ندارد

۶- $f+g$ هم در a حد ندارد، زیرا

برهان خلف: اگر $f+g$ در a دارای حد باشد، چون f در a دارای حد است پس تفاضل آنها یعنی $(f+g)-f=g$ هم در a دارای حد است که خلاف فرض(عدم وجود حد g در a) است.

۷- $$\lim_{x\to -۱^-}\frac{x^۲+[x]}{|x|}=\frac{(-۱)^۲+(-۲)}{۱}=-۱\ ,\ \lim_{x\to -۱^+}(۳x+b)=-۳+b\Rightarrow -۳+b=-۱\Rightarrow b=۲$$

۸- $a)\ \lim_{x\to -۲}(۲g(x)-f(x))=۲\lim_{x\to -۲}g(x)-\lim_{x\to -۲}f(x)=۲(۲)-۰=۴$

$b)\ \begin{cases}\lim_{x\to ۰^+}f(x)=۱\\ \lim_{x\to ۰^-}f(x)=-۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}f(x)\boxed{\times}$ تابع f در ۰ حدندارد ولی g در ۰ حددارد پس $\frac{g}{f}$ در ۰ حدندارد.

$c)\ \lim_{x\to -۳}-۳\sqrt{g(x)}=-۳\sqrt{\lim_{x\to -۳}g(x)}=-۳\sqrt{۱}=-۳$

$d)\ \lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}=۲\sqrt[۳]{\lim_{x\to ۲}g(x)}=۲\sqrt[۳]{۳}$

۱- الف) $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to-1}\frac{2x-1}{3x}=\frac{-3}{-3}=1$

ب) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x+2)}{1}=8$

پ) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{\times}\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)-4}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{16}$

ت) $\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\overset{\frac{0}{0}}{\times}\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(4-x)}(3+\sqrt{2x+1})}{\underset{2}{\cancel{(9-2x-1)}}(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

ث) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{\times}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{(x^2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

ج) $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=1$

۲- $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}f(x).g(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x+1}{\cancel{(2x+1)}(x-1)}\times\frac{\cancel{2x+1}}{x}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

۳- الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{\times}\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overset{\cos^2x}{\cancel{1-\sin^2x}}}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{0}{1+1}=0$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x.\cos\frac{\pi}{4}-\sin x.\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{\cos x-\sin x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

پ) $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{|1-\cos x|}\underset{1-\cos x>0}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\boxed{x^2}(1+\cos x)}{\boxed{\sin^2x}}=\lim_{x\to0^-}1+\cos x=2$

ت) روش $\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\overset{\sin^2x}{\cancel{(1-\cos x)(1+\cos x)}}}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\boxed{\sin x}}{\boxed{x}(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{1+\cos x}=\frac{2}{2}=1$

روش $\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{2}(2\sin^2(\frac{x}{2}))}{x(\cancel{2}\sin(\frac{x}{2}).\cos(\frac{x}{2}))}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin(\frac{x}{2})}{2\times\frac{x}{2}.\cos(\frac{x}{2})}=\frac{1}{\cos0}=1$

ث) روش

$$x+\pi=t \Rightarrow x=t-\pi,\ \boxed{x\to-\pi \Rightarrow t\to 0}\quad \lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(-\pi+t)+1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{(1-\cos^2 t)}^{\sin^2 t}}{t(1+\cos t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\sin t}{t(1+\cos t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{0}{2}=0$$

روش

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}=\lim_{x\to-\pi}\frac{2\cos^2(\frac{x}{2})}{x+\pi}=\lim_{x\to-\pi}\frac{\cancel{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}).\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})}{\frac{x+\pi}{2}\times\cancel{2}}=\lim_{x\to-\pi}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin 0=0$$

ج) روش

$$\begin{cases}x-a=t \Rightarrow x=a+t\\ x\to a \Rightarrow t\to 0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\cos a+\cos t.\sin a-\sin a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\cos a}{t}+\sin a(\frac{\cos t-1}{t})$$

$$=\lim_{t\to 0}\cos a+\sin a\frac{(-2\sin^2(\frac{t}{2}))}{t}=\cos a+\sin a.\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin(\frac{t}{2}).\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}\times 2}=\cos a+\sin a\times 0=\cos a$$

روش

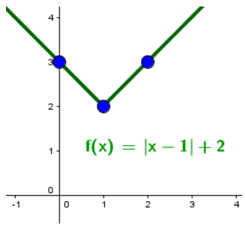
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{2}\sin(\frac{x-a}{2}).\cos(\frac{x+a}{2})}{\frac{x-a}{2}\times\cancel{2}}=\lim_{x\to a}\cos(\frac{x+a}{2})=\cos a$$

چ)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\overbrace{\sin(x-\frac{\pi}{3})}^{t\to 0}}{6x-2\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{6t}=\frac{1}{6}$$

ح)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1-3\sqrt{x}}{x-1}\times\frac{2x+1+3\sqrt{x}}{2x+1+3\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+1+4x-9x}{(x-1)(2x+1+3\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(4x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x+1+3\sqrt{x})}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

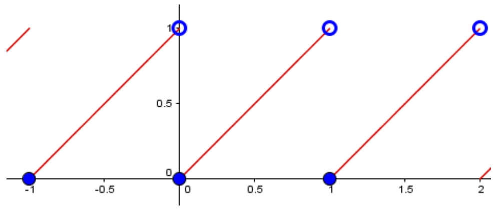


۱- الف) تابع در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است.

$$y=|x-1|+2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 2 & 3 \end{array}$$

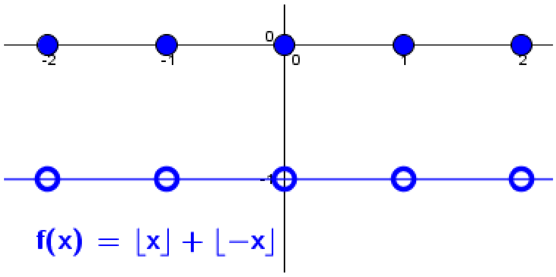
ب) تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست.

$$y=x-[x] \Rightarrow y=\begin{cases} x+1 & -1\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ x-1 & 1\le x<2 \\ \dots & \end{cases}$$



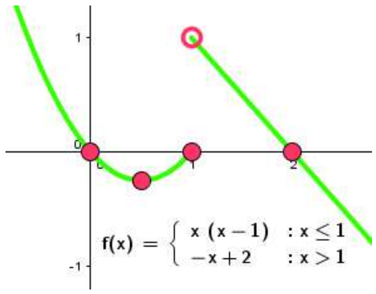
پ) تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست .

$$y=[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$



ت) تابع فقط در ۱ پیوسته نیست.

$$y=\begin{cases} x(x-1) & x\le 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \\ -x+2 & x>1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$$



۲- الف)

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=\boxed{1} \\ a & x=1 \Rightarrow f(1)=\boxed{a} \\ -x+2 & x<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x+2)=\boxed{1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

ب)

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\ne 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\boxed{3} \\ a & x=1 \Rightarrow g(1)=\boxed{a} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=3}$$

پ)

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\boxed{\frac{1}{2}} \\ [x]+a & x\ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}[x]+a=\boxed{1+a}\ ,\ \boxed{h(1)=1+a} \end{cases} \Rightarrow 1+a=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

ت) $$k(x)=([x]-a)[x]\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}k(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}([x]-a)[x]=(1-a)(1)=\boxed{1-a}\\ k(1)=(1-a)(1)=\boxed{1-a}\\ \lim\limits_{x\to 1^-}k(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}([x]-a)[x]=(0-a)(0)=\boxed{0}\end{cases}\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow\boxed{a=1}$$

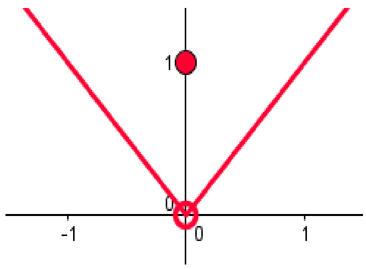
۳- همزمان a باید هم صفر و هم یک باشد که غیر ممکن است.

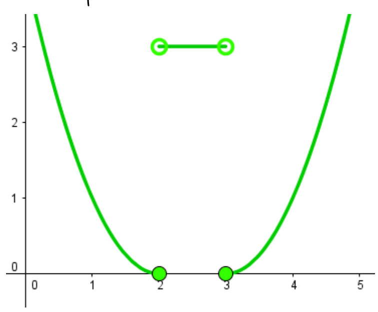
الف) $$f(x)=\begin{cases}x & x<0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0\\ a & x=0\Rightarrow f(0)=a\\ 2x+1 & x>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1\end{cases}\Rightarrow a=0\wedge a=1\ \boxed{\times}$$

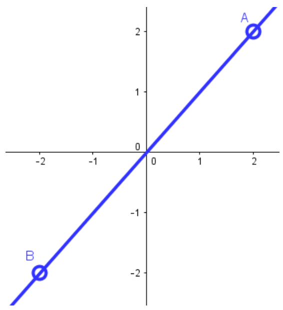
همزمان a باید ۱ , ۱- باشد که غیر ممکن است.

ب) $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{x}=\boxed{a}\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{-x}=\boxed{-a}\\ 1 & x=0\Rightarrow\boxed{g(0)=1}\end{cases}\Rightarrow a=1\wedge a=-1\ \boxed{\times}$$

۴- الف) در ۰ ناپیوسته ودارای حد ب) در ۲,۳ ناپیوسته و عدم وجودحد پ) فقط دردونقطه نا پیوسته







۵- تابع پلکانی در بازه باز شامل نقاط درونی هر پله ، پیوسته است و در $f(x)=[x]$ طول پله برابر ۱ است پس طول بزرگترین بازه که f در آن پیوسته باشد برابر ۱ است یعنی $k-2\leq 1\Rightarrow k\leq 3\Rightarrow \max_k=3$

۶- توابع تک ضابطه ای بر دامنه شان پیوسته اند . $3-x\geq 0\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow D_f=(-\infty,3]$

هر بازه بسته زیر مجموعه D_f پاسخ پرسش است، مثلا $[0,2]\,,[1,2]\,,[2,3]$

-۷

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{4}\times 4}=\boxed{\frac{1}{2}}\\ b-1 & x=0\Rightarrow f(0)=\boxed{b-1}\\ x-2a & x<0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x-2a=\boxed{-2a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-1=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{2}}\\ -2a=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{4}}\end{cases}$$

روابط مثلثاتی)

$$\begin{cases}1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\sin x=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\\ 1-\sin x=2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})\\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}\\ \tan x-\cot x=-2\cot 2x\end{cases}$$
